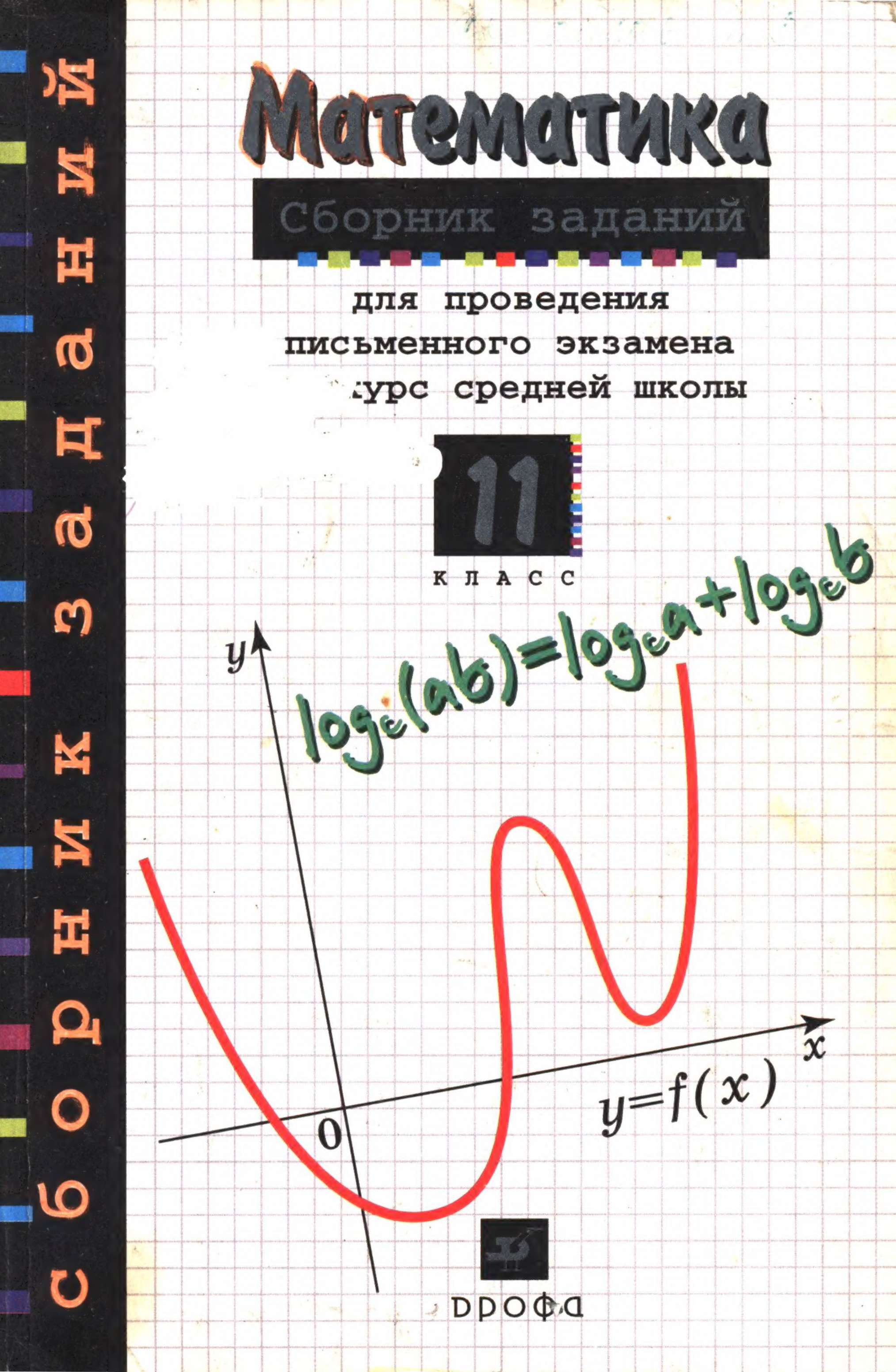

сборник заданий
Математика
Сборник заданий
для проведения
письменного экзамена
курс средней школы
11
класс
$\log_e(ab)=\log_e a+\log_e b$
y
x
0
$y=f(x)$
ДРОФА

МАТЕМАТИКА

Сборник заданий

для проведения письменного экзамена
по математике (курс А)
и алгебре и началам анализа (курс В)
за курс средней школы

11

КЛАСС

Рекомендовано Департаментом
образовательных программ
и стандартов общего образования
Министерства образования
Российской Федерации



5-е издание, стереотипное



ДРОФА

Москва · 2002

УДК 372.851
ББК 74.262.21
Д69

Дорофеев Г. В.

Д69 Сборник заданий для проведения письменного экзамена по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс В) за курс средней школы. 11 класс / Г. В. Дорофеев, Г. К. Муравин, Е. А. Седова. — 5-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2002. — 160 с.: ил.

ISBN 5—7107—5312—2

УДК 372.851
ББК 74.262.21

Учебное издание

Дорофеев Георгий Владимирович
Муравин Георгий Константинович
Седова Елена Александровна

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

для проведения письменного экзамена по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс В) за курс средней школы

11 класс

Зав. редакцией *М. Г. Циновская*
Редактор *Ж. И. Яковлева*
Оформление *Д. С. Иванов*
Технический редактор *М. В. Биденко*
Компьютерная верстка *Т. Г. Гончарова, С. Л. Мамедова*
Корректор *Н. С. Соболева*

Изд. лиц. № 061622 от 07.10.97.
Подписано к печати 14.01.02. Формат 60×90[1]/[16]. Бумага типографская.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,0.
Тираж 300 000 экз. Заказ № 5527.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу: 127018, Москва, Сущевский вал, 49. Тел.: (095) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (095) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник». 109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А. Тел.: (095) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ОАО «Можайский полиграфический комбинат». 143200, г. Можайск, ул. Мира, 93.

ISBN 5—7107—5312—2

Оглавление

Предисловие

Настоящий сборник заданий предназначен для итоговой аттестации в 11 классе по курсу «Математика» (курс А) и по курсу «Алгебра и начала анализа» (курс В). Тексты заданий предполагаются открытыми для использования в обычном учебном процессе или при специальной подготовке (например, в системе экстерната). Экзаменационная работа, составляемая на основе сборника, содержит десять заданий.

Курс А
«Математика» (3 ч в неделю)

Экзаменационная работа по курсу «Математика» состоит из двух частей.

Первая часть (*задания 1—7*) включает пять заданий по алгебре и началам анализа и два геометрических задания. Задания первой части скомпонованы в наборы по семь заданий и помещены в разделе 1 (*задания 1—5*) и разделе 2 (*задания 6, 7*). Всего в сборнике 96 таких наборов. Уровень сложности этих заданий определяется «Требованиями к математической подготовке учащихся», предусмотренными программой.

Задания первой части не требуют громоздких вычислений, сложных преобразований и нестандартных умозаключений. Для их решения достаточно уметь использовать основные определения, владеть минимальным набором формул и алгоритмов. Задания по геометрии требуют, помимо знания формул и умения ими пользоваться, определенного уровня стереометрических представлений, умения работать с изображениями пространственных конфигураций. В то же время уровень доказательности при выполнении заданий предполагается минимальным.

Вторая часть экзаменационной работы по курсу «Математика» состоит из одного геометрического задания (*задание 8*), которое помещено в разделе 3, и двух заданий по алгебре и началам анализа (*задания 9, 10*), которые помещены в разделе 4.

Вторая часть составлена из стандартных для курса математики 10—11 классов заданий, уровень сложности которых несколько выше, чем в первой части. Содержание заданий по геометрии соответствует целям изучения геометрии в курсе «Математика», и для их решения достаточно изучавшегося в курсе геометрического материала. От выпускников, однако, не требуется владения навыками сложных вычислений и преобразований, специальными приемами решения уравнений и неравенств, хотя часть заданий предполагает наличие определенных знаний и умений, приобретенных не только в старших классах, но и в основной школе (подстановка, формулы сокращенного умножения, уравнение прямой и т. п.).

Для получения отметки «3» (*удовлетворительно*) выпускник должен правильно выполнить *любые* пять заданий. Отметка «4» (*хорошо*) выставляется при выполнении любых семи заданий. Отметка «5» (*отлично*) ставится за девять верно выполненных заданий.

Курс В
«Алгебра и начала анализа» (4,5—5 ч в неделю)

Экзаменационная работа по курсу «Алгебра и начала анализа» состоит из трех частей.

Первая часть экзамена (*задания 1—5*) полностью совпадает с первыми пятью заданиями экзамена по курсу «Математика» (раздел 1).

Вторую часть экзамена составляют задания, помещенные в разделах 4 (*задания 6, 7*) и 5 (*задание 8*) сборника. Это традиционные задания, предлагаемые школьникам на выпускном экзамене по курсу «Алгебра и начала анализа».

Третья часть экзамена (*задания 9, 10*) состоит из заданий, подобных тем, которые используются на вступительных экзаменах в высшие учебные заведения. Они находятся в разделе 6 сборника. Решение этих задач не требует ни дополнительных навыков, ни дополнительных идей по сравнению с задачами, обычно предлагающимися в школьных учебниках. Вместе с тем такие задания или требующиеся для их выполнения идеи нередко ускользают от внимания учителя.

Критерии оценки работы совпадают с критериями для курса «Математика».

Для удобства пользования сборником задания разделов 4—6 сгруппированы по темам.

Экзаменационная работа	Варианты (номера) заданий
«Математика» (курс А)	
Задания 1—5	Варианты 1—96
Задания 6, 7	Варианты 1—96
Задание 8	3.1—3.100
Задания 9, 10	4.1—4.200
«Алгебра и начала анализа» (курс В)	
Задания 1—5	Варианты 1—96
Задания 6, 7	
тригонометрия	4.1—4.50
степени и логарифмы	4.51—4.156
производная и ее приложения	4.157—4.200
Задание 8	
тригонометрия	5.1—5.26
иррациональные уравнения	5.27—5.56
степени и логарифмы	5.57—5.82
производная и ее приложения	5.83—5.100
Задания 9, 10	
уравнения	6.1—6.144
модули	6.145—6.206
параметры	6.207—6.232
неравенства	6.233—6.277
возрастание, убывание, экстремумы, наибольшие и наименьшие значения	6.278—6.300



Задания 1—5 для экзаменов «Математика» и «Алгебра и начала анализа»

Вариант 1

1. Решите неравенство $\frac{x - 4x^2}{x - 1} > 0$.

2. Решите уравнение $\log_2 (2x - 1) = 3$.

3. Найдите корни уравнения $2 \sin x + 1 = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 1). Укажите:
а) область определения функции;
б) промежутки возрастания и убывания функции;
в) при каких значениях x $f(x) = 0$;
г) наибольшее и наименьшее значения функции;
д) при каких значениях x $-4 < f(x) < 2$.

5. Найдите все первообразные функции $f(x) = x^4 + 3x^2 + 5$.

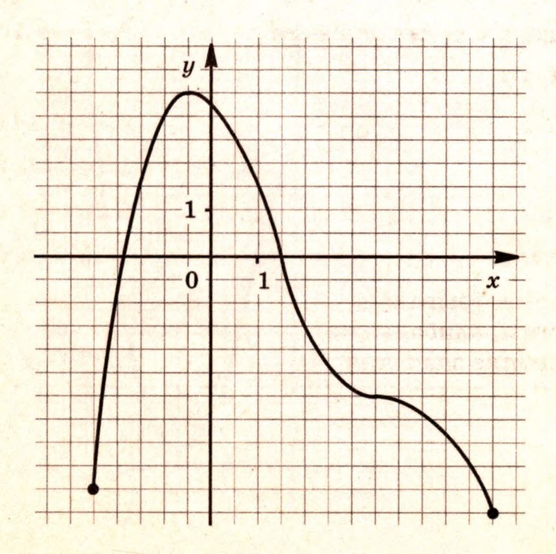


Рис. 1

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\frac{(x-6)(x-8)}{2x-7} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$5^{x+1} + 5^{x} + 5^{x-1} = 31.$$

3. Решите уравнение $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 2). Укажите:

а) область определения функции;

б) нули функции;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) наибольшее и наименьшее значения функции;

д) при каких значениях x $f(x) < -2$.

5. Найдите все первообразные функции

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1.$$

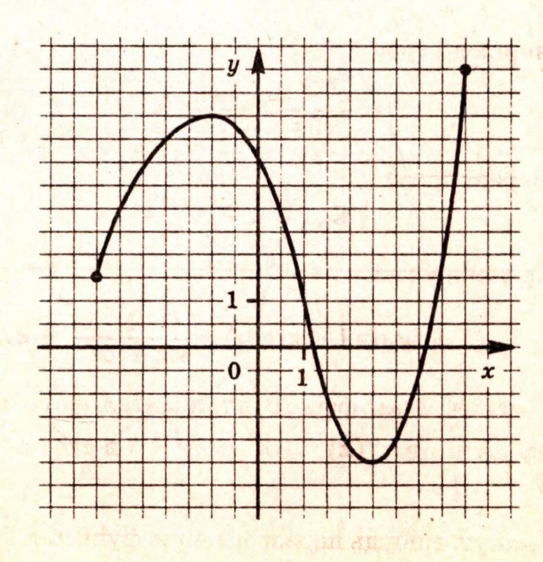


Рис. 2

Вариант 3

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2-4}{2x+1}<0.$$

2. Решите уравнение

$$27^{1-x}=\frac{1}{81}.$$

3. Решите уравнение

$$\cos(2\pi-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{2}.$$

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-3; 4]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-2; 5]$;

в) в левом конце области определения функция принимает наибольшее значение;

г) 2 — единственная точка экстремума функции.

5. Найдите производную функции $f(x)=e^x(x^2+1)$.

Вариант 4

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2+2x-3}{2x-3}>0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{0,5}(2-x)>-1.$$

3. Докажите тождество

$$(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\alpha)-\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=2.$$

4. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x)=3x^3+2x-5$ в его точке с абсциссой $x=2$.

5. Найдите какую-нибудь первообразную функции $f(x)=4+6x^2$, значение которой при $x=2$ отрицательно.

Вариант 5

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg \frac{2x+1}{x-1}.$$

2. Решите неравенство

$$8^{2x+1} > 0{,}125.$$

3. Решите уравнение

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2} = 0.$$

4. Найдите производную функции $f(x) = 2x^2 + \operatorname{tg} x$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2 + 5x + 6$, прямыми $x = -1$, $x = 2$ и осью абсцисс.

Вариант 6

1. Решите неравенство

$$\frac{54 - 6x^2}{4x + 7} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} = 24.$$

3. Решите уравнение

$$\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) = 0.$$

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
а) область определения функции есть промежуток $[-5; 2]$;
б) значения функции составляют промежуток $[-2; 5]$;
в) промежутки убывания функции $[-5; -2]$ и $[0; 2]$;
г) функция возрастает на промежутке $[-2; 0]$;
д) отрицательные значения функция принимает только в точках промежутка $(1; 2]$.

5. Дана функция $f(x) = x^5 - 5x^2 + 1$. Найдите координаты точек ее графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс.

Вариант 7

1. Вычислите

$$9^{\frac{3}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_4 (7 - x) < 3.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin x \cos x,$$

принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 3). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $-2{,}5 \leqslant f(x) \leqslant 1{,}5$;

в) промежутки, на которых $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$;

г) точки экстремума функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Является ли функция $F(x) = x^3 - 3x + 1$ первообразной функции $f(x) = 3(x^2 - 1)$?

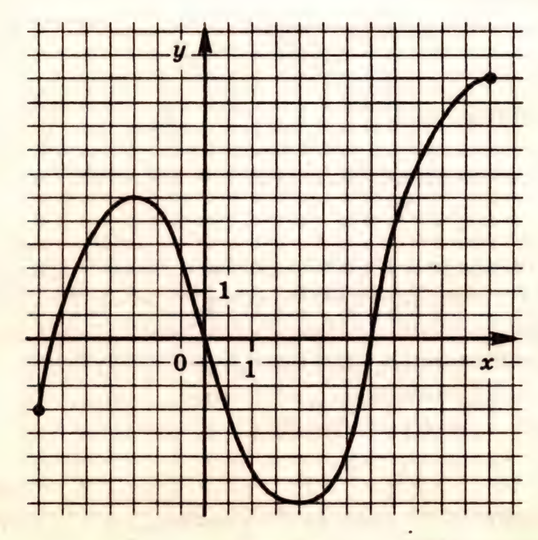


Рис. 3

Вариант 8

1. Вычислите $25^{1,5} + (0,25)^{-0,5} - 81^{0,75}$.

2. Решите неравенство $\log_9 (4 - 3x) > 0,5$.

3. Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
   а) область определения функции есть промежуток $[-3; 5]$;
   б) значения функции составляют промежуток $[-4; 4]$;
   в) в правом конце области определения функция принимает наибольшее значение;
   г) -1 — единственная точка экстремума функции.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону
$$S = 5t - 0,5t^2 \text{ (м)},$$
где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 2 с после начала движения.

Вариант 9

1. Решите неравенство
$$\frac{(x + 5)(x - 7)}{3x - 1} > 0.$$

2. Решите уравнение $3^{x + 2} - 5 \cdot 3^x = 36$.

3. Найдите корни уравнения $(\sin x + 1)^2 = \sin^2 x + 1$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
   а) область определения функции есть промежуток $[-5; 2]$;
   б) значения функции составляют промежуток $[-3; 4]$;
   в) в правом конце области определения функция принимает наибольшее значение;
   г) значения функции отрицательны только в точках промежутка $(-4; 0)$.

5. Найдите первообразную функции $f(x) = x^2 - 5$, график которой проходит через точку $(3; 4)$.

Вариант 10

1. Решите неравенство

$$\frac{2x + 8x^2}{2x - 1} < 0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_7 (x - 1) \leqslant \log_7 2 + \log_7 3.$$

3. Найдите корни уравнения $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 4). Укажите:

а) область определения функции;

б) нули функции;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) наибольшее и наименьшее значения функции;

д) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс.

5. Найдите промежутки возрастания функции

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x.$$

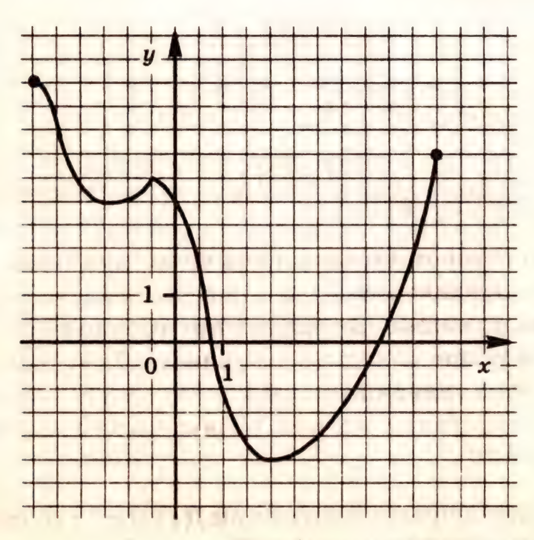


Рис. 4

Вариант 11

1. Решите неравенство $\frac{8x^2 - 2}{3 - x} > 0$.

2. Решите уравнение $36 \cdot 216^{3x+1} = 1$.

3. Решите уравнение

$$\sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{3}.$$

4. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x - \ln x$ в его точке с абсциссой $x = 3$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2 - 6x + 8$, прямыми $x = -2$, $x = -1$ и осью абсцисс.

Вариант 12

1. Решите неравенство $\frac{8x^2 - 2x}{3 - 6x} > 0$.

2. Решите уравнение

$$2\log_3 2 - \log_3(x - 1) = 1 + \log_3 5.$$

3. Решите уравнение $2\cos\frac{x}{4} - \sqrt{3} = 0$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-4; 4]$;

в) в левом конце области определения функция принимает наибольшее значение;

г) значения функции отрицательны только в точках промежутка $(-2; 1)$;

д) -1 — единственная точка экстремума функции.

5. Дана функция $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 1$. Найдите координаты точек ее графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс.

Вариант 13

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg \frac{x-2}{4x-1}.$$

2. Решите неравенство

$$100^{2x+1} < 0{,}1.$$

3. Решите уравнение

$$4\cos^2 x - 1 = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 5). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x функция y не имеет производной;

в) при каких значениях x $f'(x) < 0$, $f'(x) > 0$;

г) наибольшее и наименьшее значения функции;

д) в какой точке графика касательная к нему параллельна оси абсцисс.

5. Найдите все первообразные функции

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1.$$

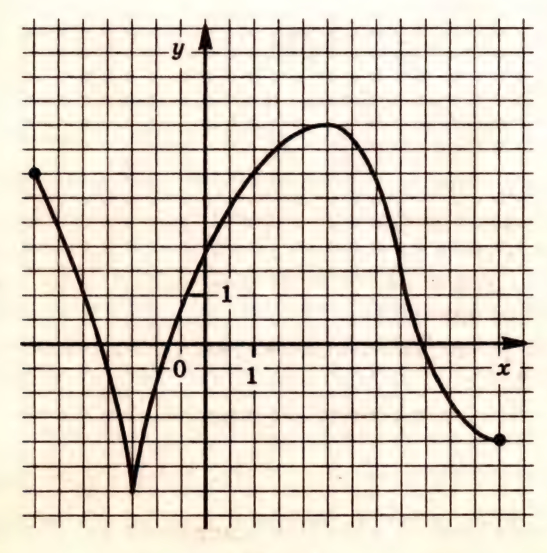


Рис. 5

Вариант 14

1. Вычислите $9^{1,5} - 81^{0,5} - (0,5)^{-2}$.

2. Решите неравенство $\log_2 (1 - 2x) < 0$.

3. Найдите $\cos x$, если $\sin x = -\frac{15}{17}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

4. Изобразите график функции, зная, что:
   а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;
   б) значения функции составляют промежуток $[-4; 2]$;
   в) производная функции положительна на $(-4; 1)$, отрицательна на $(1; 3)$;
   г) 1 — нуль производной функции;
   д) -2 и 2 — нули функции.

5. Найдите какую-нибудь первообразную функции

$$f(x) = 4x^3 - x^2 + 2,$$

которая принимает отрицательное значение при $x = 1$.

Вариант 15

1. Вычислите $16^{\frac{5}{4}} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}}$.

2. Найдите все целые решения неравенства

$$\frac{1}{27} \leqslant 3^{2-x} < 27.$$

3. Решите уравнение $\cos^2 x + \cos x = -\sin^2 x$.

4. Изобразите график функции, зная, что:
   а) область определения функции есть промежуток $[-2; 5]$;
   б) значения функции составляют промежуток $[-5; 3]$;
   в) производная функции положительна на $(2; 5)$, отрицательна на $(-2; -1)$ и на $(-1; 2)$;
   г) нули производной функции: -1 и 2;
   д) нули функции: 0 и 3.

5. Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

Вариант 16

1. Упростите

$$a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{3}}a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{6}}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_2(2x+1) > 4.$$

3. Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos\frac{\pi}{6}.$$

4. Найдите промежутки возрастания функции

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5.$$

5. Найдите первообразную функции $f(x) = 4 - x^2$, график которой проходит через точку $(-3; 10)$.

Вариант 17

1. Решите неравенство

$$\frac{4x - x^2}{3 + 2x} \leqslant 0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_3(2x+1) = \log_3 13 + 1.$$

3. Найдите корни уравнения $2\sin x + \sqrt{3} = 0$, принадлежащие отрезку $\left[0; 2\pi\right]$.

4. Изобразите график непрерывной функции $y = f(x)$, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-6; 1]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-2; 4]$;

в) $f'(x) < 0$ для любого x из промежутка $(-4; -1)$, $f'(x) > 0$ для любого x из промежутков $(-6; -4)$ и $(-1; 1)$, $f'(x) = 0$ при $x = -4$;

г) нули функции: $x = -4$ и $x = 0$.

5. Найдите первообразную функции $f(x) = 2x^2 + 3$, график которой проходит через точку $(-2; -5)$.

Вариант 18

1. Решите неравенство

$$\frac{4x - 9x^2}{10 - x} \geqslant 0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{0,5}(3x - 1) = -3.$$

3. Найдите корни уравнения $2\cos x + \sqrt{3} = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 6). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) > 2$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) при каких значениях x $f'(x) = 0$;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите промежутки убывания функции

$$y = 2x^3 + 9x^2 - 24x.$$

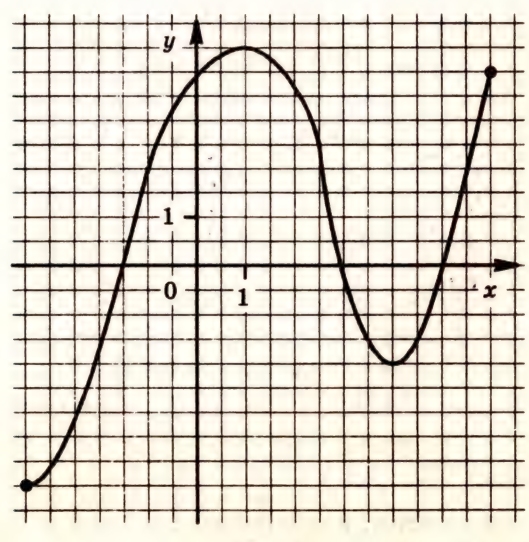


Рис. 6

Вариант 19

1. Решите неравенство

$$\frac{3x^2 - 27}{2x + 7} < 0.$$

2. Решите уравнение $49^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^x$.

3. Решите уравнение

$$\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) = 0.$$

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;
б) значения функции составляют промежуток $[-2; 5]$;
в) промежутки возрастания функции: $[-4; -2]$ и $[1; 3]$;
г) функция убывает на промежутке $[-2; 1]$.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону

$$S = t + 0{,}5t^2 \text{ (м)},$$

где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 4 с после начала движения.

Вариант 20

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{x - 1} > 0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_5(3x + 1) < 2.$$

3. Найдите $\sin x$, если

$$\cos x = \frac{8}{17},\ -\frac{\pi}{2} < x < 0.$$

4. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 3x^2 + 18x + 7$ на промежутке $[-5; -1]$.

5. Найдите все функции, которые имеют одну и ту же производную: $f(x) = x + 5$.

Вариант 21

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg \frac{2x - 3}{x + 7}.$$

2. Решите неравенство

$$27^{1 + 2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{2 + x}.$$

3. Решите уравнение

$$7 \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + 5\sin x + 1 = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 7). Укажите:
   а) область определения функции;
   б) при каких значениях x $-2 < f(x) \leqslant 1$;
   в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
   г) при каких значениях x $f'(x) = 0$;
   д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите первообразную функции $f(x) = 3x - 5$, график которой проходит через точку (4; 10).

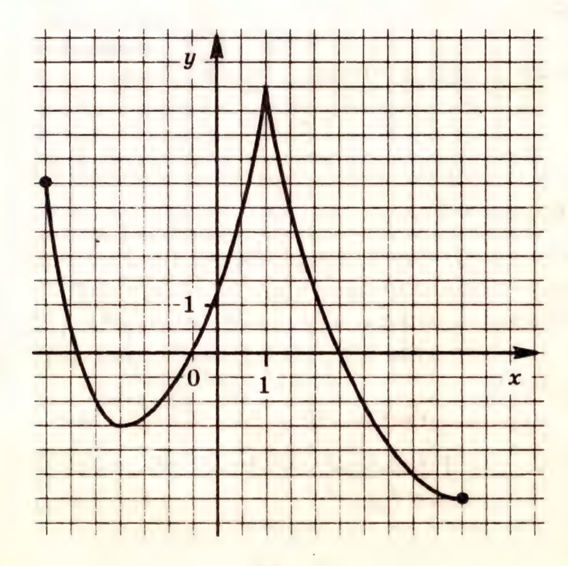


Рис. 7

Вариант 22

1. Упростите $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{7}{12}}a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{2}{3}}$.

2. Решите неравенство

$$\log_5(4x+1) > -1.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 = 0,$$

принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$.

4. Дана функция $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Найдите координаты точки ее графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен 7.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $f(x) = 2x - x^2$.

Вариант 23

1. Упростите $a^{-\frac{9}{2}}b^{\frac{1}{12}} : \left(a^{-\frac{19}{4}}b^{\frac{1}{3}}\right)$.

2. Найдите все целые решения неравенства

$$0{,}2 \leqslant 5^{x+4} \leqslant 125.$$

3. Найдите все решения уравнения $(\sin x + \cos x)^2 - 1 = 0$, принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
а) область ее определения есть промежуток $[-3;\ 4]$;
б) значения функции составляют промежуток $[-2;\ 5]$;
в) значения функции отрицательны только в точках промежутка $(0;\ 3)$;
г) точки экстремума функции -1 и 2.

5. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 4\cos x + 3$ в его точке с абсциссой $x = -\frac{\pi}{3}$.

Вариант 24

1. Упростите

$$a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{5}{24}} : \left(a^{\frac{5}{12}}b^{-\frac{1}{8}}\right).$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}}(2x + 3) > -3.$$

3. Решите уравнение

$$\sin(\pi + x) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

4. Дана функция $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2$. Найдите координаты точек ее графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс.

5. Найдите все первообразные функции

$$f(x) = x^4 + 3x.$$

Вариант 25

1. Решите неравенство

$$\frac{2x^2 - 1}{x - 8} > 0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{0,5}(2x) > 2.$$

3. Найдите корни уравнения

$$(\cos x - 1)^2 = \cos^2 x - 1.$$

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток [−1; 8];

б) значения функции составляют промежуток [−4; 2];

в) функция возрастает на промежутках [−1; 3] и [5; 8], убывает на промежутке [3; 5];

г) нули функции: 3 и 7.

5. Какие из данных функций возрастают на всей области определения $y = \sin x$, $y = x + 1$, $y = e^x$, $y = \sqrt{x}$?

Вариант 26

1. Решите неравенство

$$\frac{11x^2 - x}{2 + x} \leqslant 0.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{2}\log_2(3x - 2) = 3.$$

3. Решите уравнение

$$\sin\frac{x}{2} + 1 = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 8). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $\quad f(x) < 1$;

в) при каких значениях x $\quad f'(x) < 0$, $f'(x) > 0$;

г) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите промежутки возрастания функции

$$y = -x^3 + x^2 + 8x.$$

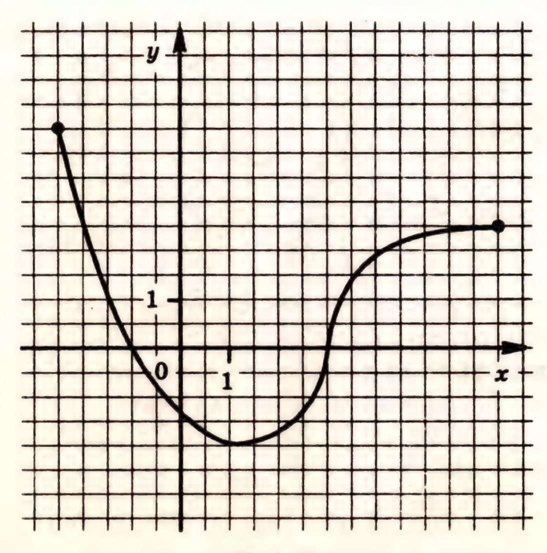


Рис. 8

Вариант 27

1. Решите неравенство

$$\frac{4 - x^2}{2x - 3} > 0.$$

2. Решите уравнение

$$9 \cdot 81^{1 - 2x} = 27^{2 - x}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin x + \sin(\pi + x) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 9). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) < -1$;

в) при каких значениях x $f'(x) < 0$, $f'(x) > 0$;

г) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите все первообразные функции

$$f(x) = 4x - x^2.$$

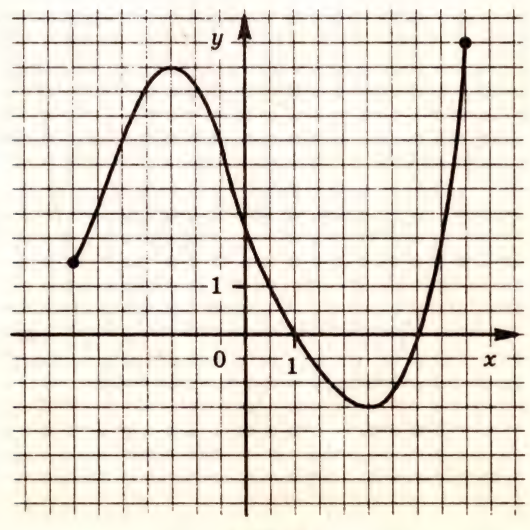


Рис. 9

Вариант 28

1. Решите неравенство

$$\frac{3x^2 + 4x - 4}{8 + 15x} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$-\log_7 (5 - x) = \log_7 2 - 1.$$

3. Найдите $\sin x$, если

$$\cos x = -\frac{5}{13}, \qquad \pi < x < \frac{3\pi}{2}.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 10). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) > 1$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) в какой точке графика касательная к нему параллельна оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Является ли функция $F(x) = x^3 + 3x - 5$ первообразной функции $f(x) = 3(x^2 + 1)$?

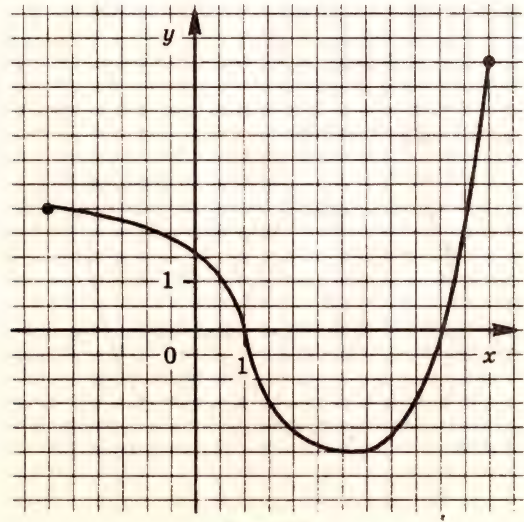


Рис. 10

Вариант 29

1. Найдите область определения функции

$$y = \ln \frac{3x + 4}{5 - x}.$$

2. Решите неравенство $\left(\frac{1}{4}\right)^{2 + 3x} < 8^{x - 1}$.

3. Решите уравнение

$$4 \cos^2 x - 3 = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 11). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) < -2$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^4 - 8.$$

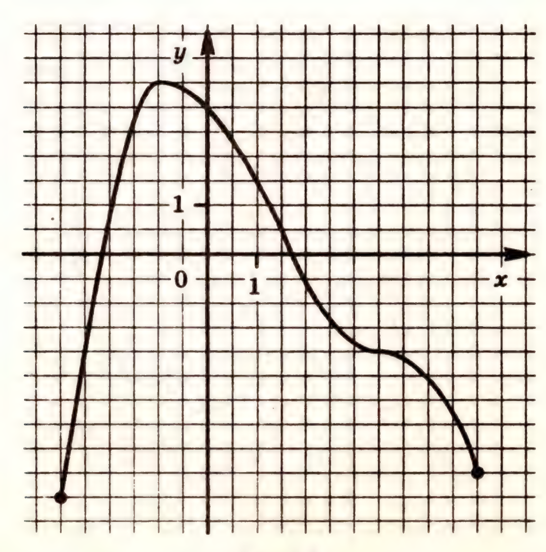


Рис. 11

Вариант 30

1. Решите неравенство

$$\frac{(x-5)(2x+7)}{4-x} \geqslant 0.$$

2. Решите уравнение $7^{x+2} - 14 \cdot 7^{x} = 5$.

3. Найдите $\cos x$, если $\sin x = \frac{12}{13}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 12). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) < -1$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону

$$S = 3t + t^2 \text{ (м)},$$

где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 3 с после начала движения.

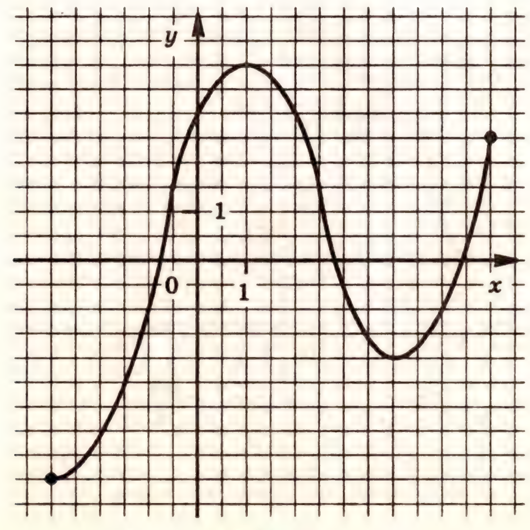


Рис. 12

Вариант 31

1. Вычислите $7^{0,5\log_7 9}$.

2. Найдите все целые решения неравенства

$$1 \leqslant 7^{x-3} < 49.$$

3. Решите уравнение

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin x + 1.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 13). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) > 3{,}5$;

в) при каких значениях x $f'(x) < 0$, $f'(x) > 0$;

г) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Дана функция $f(x) = 5 + 4x - 3x^2$. Найдите координаты точки ее графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен -5.

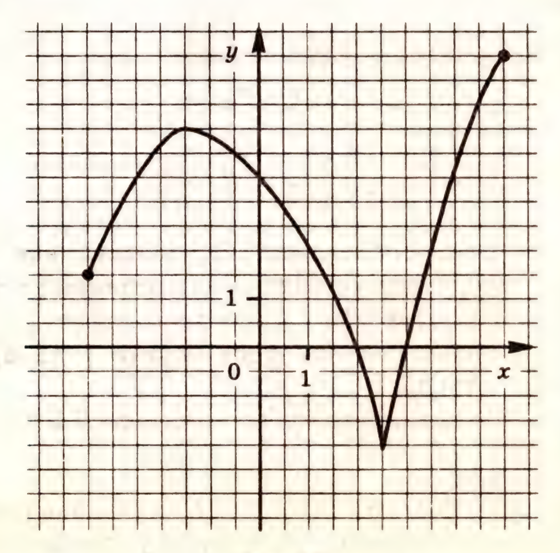


Рис. 13

Вариант 32

1. Вычислите $\dfrac{\left(a^{2}b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{9}{8}}}$ при $a = 7$, $b = 2$.

2. Решите неравенство $2 \lg 6 - \lg x > 3 \lg 2$.

3. Решите уравнение $\cos(\pi + x) = \sin\dfrac{\pi}{2}$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
а) область определения функции есть промежуток $[-6; 2]$;
б) значения функции составляют промежуток $[-5; 3]$;
в) функция возрастает на промежутках $[-6; -2]$ и $[0; 2]$;
г) точки экстремума функции: -2 и 0.

5. Является ли функция $F(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ первообразной функции $f(x) = 4x^3 - x^2 + x$?

Вариант 33

1. Найдите область определения функции $y = \lg(x^2 - 7x)$.

2. Найдите все целые решения неравенства

$$\frac{1}{6} < 6^{3-x} \leqslant 36.$$

3. Докажите тождество $\dfrac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} = \dfrac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
а) область определения функции есть промежуток $[-1; 6]$;
б) значения функции составляют промежуток $[-5; 3]$;
в) функция возрастает на промежутке $[-1; 2]$, убывает на промежутке $[2; 6]$;
г) значения функции положительны только в точках промежутка $(0; 3)$.

5. Дана функция $f(x) = 3 - 3x - 2x^2$. Найдите координаты точки графика этой функции, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен 5.

Вариант 34

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 + 5x}{2 - 8x} > 0.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{3}\log_3(2x + 1) = 1.$$

3. Найдите корни уравнения $2\sin x + \sqrt{2} = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 14). Укажите:
   а) область определения функции;
   б) при каких значениях x $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$;
   в) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;
   г) при каких значениях x $f(x) \leqslant -2$;
   д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите функции, производной которых является функция

$$f(x) = 2x + x^2.$$

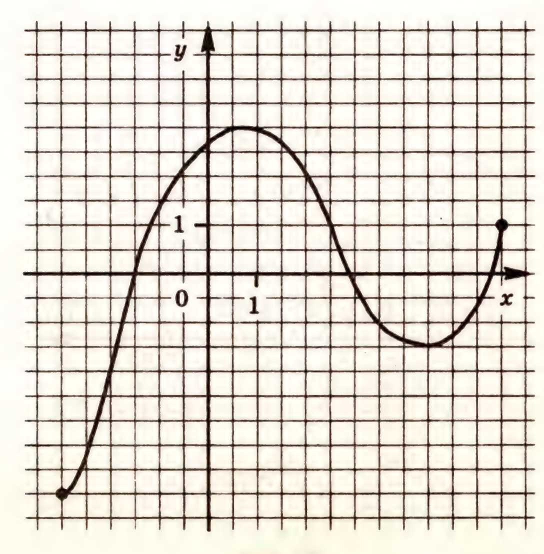


Рис. 14

Вариант 35

1. Решите неравенство

$$\frac{24-6x^2}{2x+9}<0.$$

2. Решите уравнение

$$2^{x+4}-2^x=120.$$

3. Решите уравнение

$$\cos x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi-x)=0.$$

4. Функция $y=f(x)$ задана своим графиком (рис. 15). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x)\geqslant 1{,}5$;

в) при каких значениях x $f'(x)>0$, $f'(x)<0$;

г) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Для какой из функций

$$f(x)=3(x^2-2),\ g(x)=3x(x^2-2)\text{ и }q(x)=3x^2-6x+1$$

функция $F(x)=x^3-3x^2+1$ является первообразной?

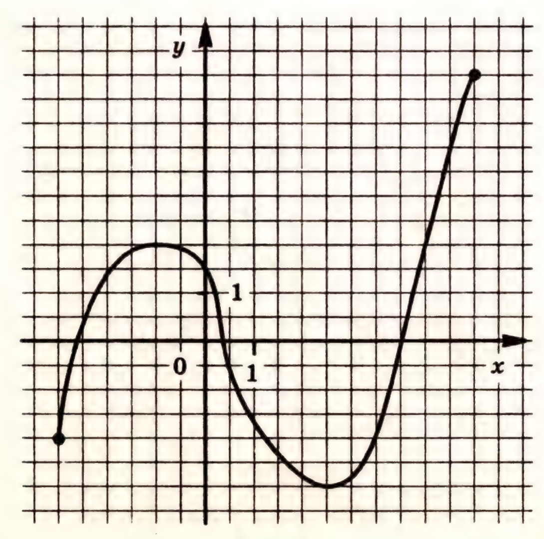


Рис. 15

Вариант 36

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 14x - 15}{10 - 4x} > 0.$$

2. Решите уравнение

$$\lg (x + 3) = 3 + 2 \lg 5.$$

3. Докажите тождество

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 16). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \leqslant 0{,}5$;

в) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите первообразную функции

$$f(x) = x - 2x^3,$$

график которой пересекает ось ординат в точке (0; 3).

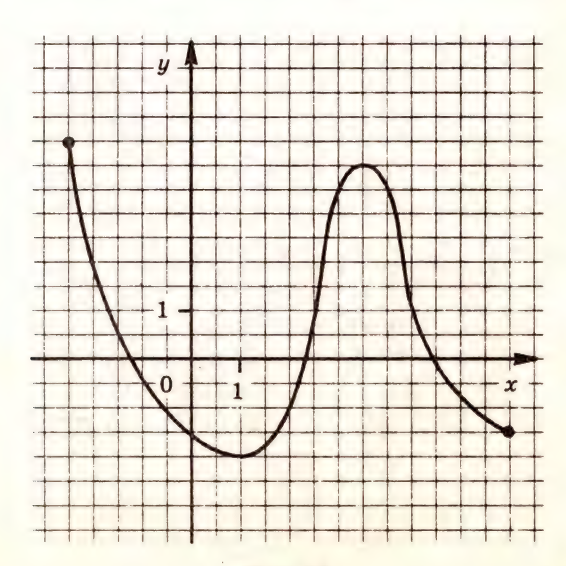


Рис. 16

Вариант 37

1. Найдите область определения функции

$$y = \ln \frac{x+5}{7x-1}.$$

2. Решите неравенство

$$8 \cdot 2^{x-1} - 2^{x} > 48.$$

3. Решите уравнение

$$\sin^2 x - 6 \sin x = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 17). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \leqslant 0{,}5$;

в) точки экстремума функции;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону

$$S = 5t - 0{,}5t^2 \text{ (м)},$$

где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 4 с после начала движения.

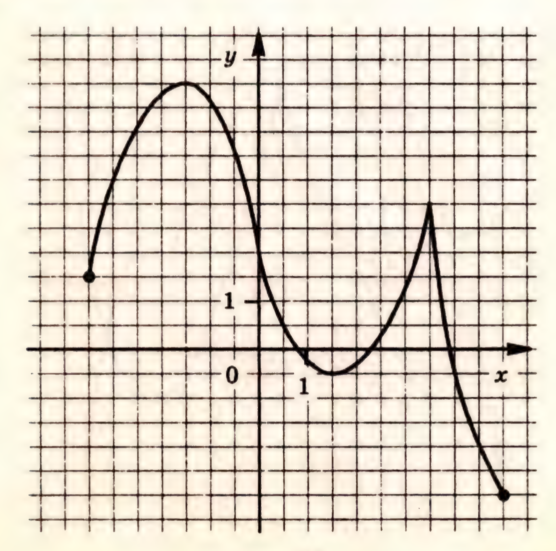


Рис. 17

3 – 5527

Вариант 38

1. Вычислите $6^{\frac{1}{3}} \cdot 18^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{6}}$.

2. Решите неравенство $\log_{0,1} x > -1$.

3. Найдите корни уравнения

$$(1 + \sin x)(1 + \cos x) = 1 + \sin x + \cos x,$$

принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 18). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \leqslant 0$;

в) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S до него от некоторой точки A этой прямой изменяется по закону

$$S = 0{,}5t^2 + 3t + 4 \text{ (м)},$$

где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 2 с после начала движения.

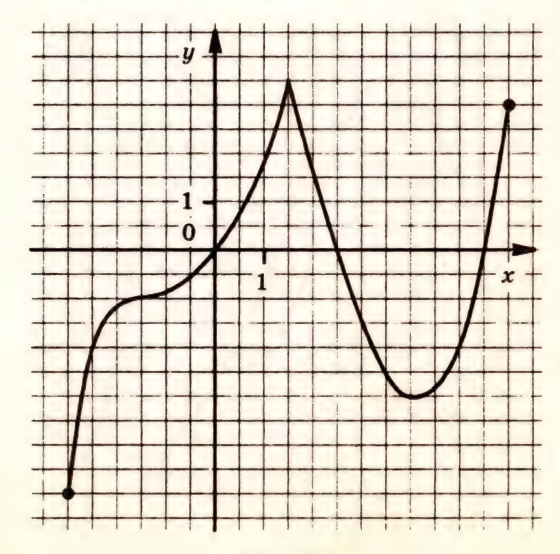


Рис. 18

Вариант 39

1. Решите неравенство

$$\frac{(x+11)(2x-5)}{3x} \leqslant 0.$$

2. Решите уравнение

$$10 \cdot 5^{x-1} + 5^{x+1} = 7.$$

3. Решите уравнение

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}\,.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 19). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \leqslant 0$;

в) точки экстремума функции;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите значение производной функции $f(x) = \operatorname{tg} x - 2\sin x$ при $x = -\frac{\pi}{4}$.

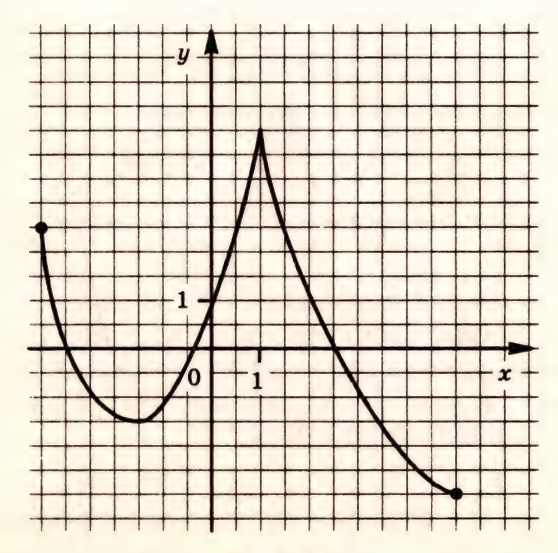


Рис. 19

Вариант 40

1. Вычислите $10^{\frac{1}{4}} \cdot 40^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$.

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{2}\lg 81 - \lg x > \lg 2.$$

3. Решите уравнение $\sin(-x) = \cos\pi$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
   а) область определения функции есть промежуток $[-3; 4]$;
   б) значения функции составляют промежуток $[-4; 3]$;
   в) функция убывает на промежутке $[-3; 1]$, возрастает на промежутке $[1; 4]$;
   г) значения функции отрицательны только в точках промежутка $(-1; 2)$.

5. К графику функции $f(x) = 3 + 7x - 4x^2$ проведена касательная с угловым коэффициентом -9. Найдите координаты точки касания.

Вариант 41

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg(4x^2 + 11x).$$

2. Найдите все целые решения неравенства

$$0{,}01 < 10^{2+x} < 10\,000.$$

3. Найдите корни уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
   а) область определения функции есть промежуток $[-2; 5]$;
   б) значения функции составляют промежуток $[-4; 4]$;
   в) функция возрастает на промежутках $[-2; 0]$ и $[3; 5]$, убывает на промежутке $[0; 3]$;
   г) нули функции: 0 и 4.

5. Какие из данных функций убывают на всей области определения: $y = 3x - 2$, $y = -5x + 9$, $y = x^2$, $y = -x^3 + x$?

Вариант 42

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 + 10x}{2 - 5x} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2 (2x + 1) = \log_2 3 + 1.$$

3. Решите уравнение

$$2 \sin \frac{x}{4} - \sqrt{3} = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 20). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$;

в) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

г) при каких значениях x $f(x) \geqslant 2$;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Для какой из функций

$$f(x) = 4x^3 - 8x + 1, \quad g(x) = 4(x^3 - 2) \text{ и } q(x) = 4x(x^2 - 2)$$

функция $F(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ является первообразной?

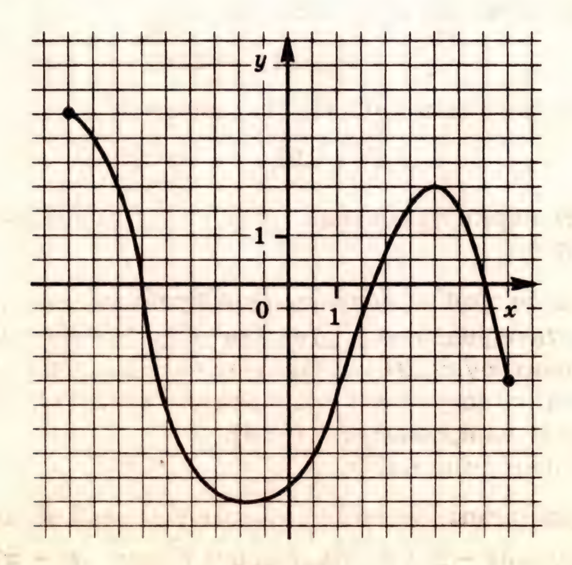


Рис. 20

Вариант 43

1. Решите неравенство

$$\frac{4-49x^2}{x-5} > 0.$$

2. Решите уравнение

$$7^x - \left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 6.$$

3. Решите уравнение

$$\sin x + \cos(2\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 21). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \geqslant 1$;

в) при каких значениях x $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$;

г) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите промежутки убывания функции

$$y = -3x^3 + 6x^2 - 5x.$$

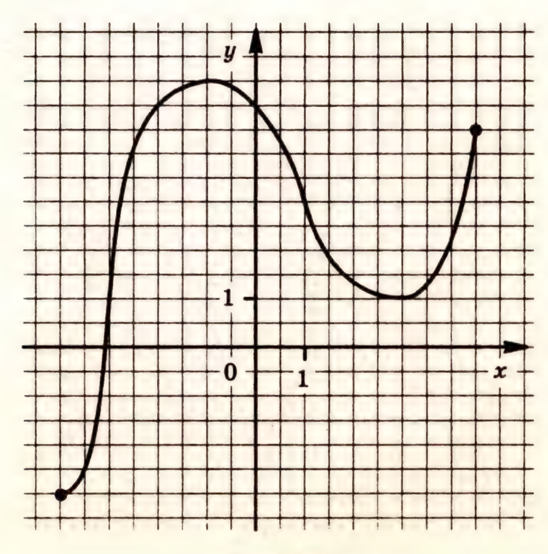


Рис. 21

Вариант 44

1. Решите неравенство $\frac{4x^2 - 16x + 7}{3(x + 2)} < 0$.

2. Решите уравнение $\lg (4x - 2) = 5 \lg 2 - 3$.

3. Докажите тождество $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + 2 \cos^2\alpha = 1$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 22). Укажите:
   а) область определения функции;
   б) при каких значениях x $f(x) \leqslant 0,5$;
   в) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;
   г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
   д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S до него от некоторой точки A этой прямой изменяется по закону
$$S = t^3 - 3t + 4 \text{ (м)},$$
где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через 3 с после начала движения.

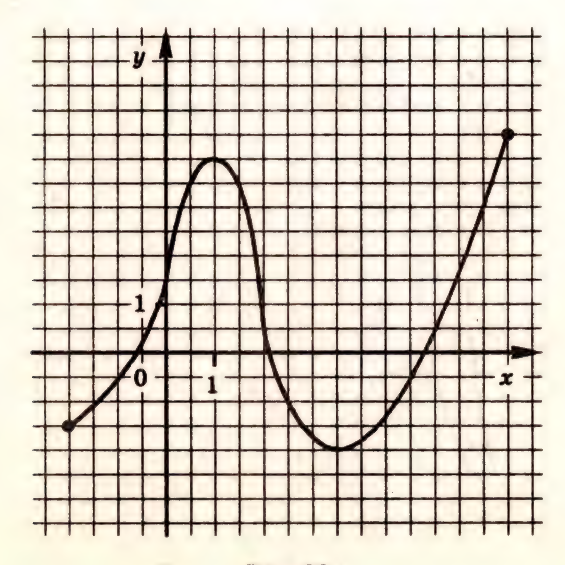


Рис. 22

Вариант 45

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg \frac{32 - 8x}{x + 1}.$$

2. Решите неравенство

$$2^{x+1} + \frac{1}{2} \cdot 2^{x} < 5.$$

3. Решите уравнение

$$2\cos^2 x - 7\cos x = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 23). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \leqslant -0{,}5$;

в) точки экстремума функции;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 3.$$

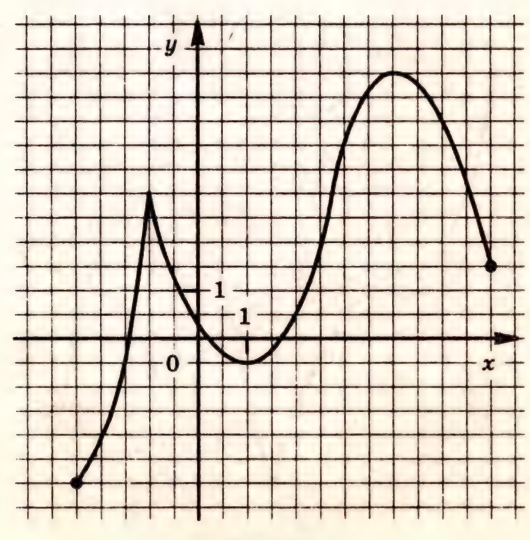


Рис. 23

Вариант 46

1. Вычислите $6^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot (0{,}25)^{\frac{1}{4}}$.

2. Решите неравенство

$$\lg(2x + 1) < 0.$$

3. Докажите тождество

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 24). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \geqslant 1$;

в) в каких точках графика касательные к нему параллельны оси абсцисс;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Дана функция $f(x) = 5x^2 - 12x + 1$. Найдите координаты точки ее графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен 3.

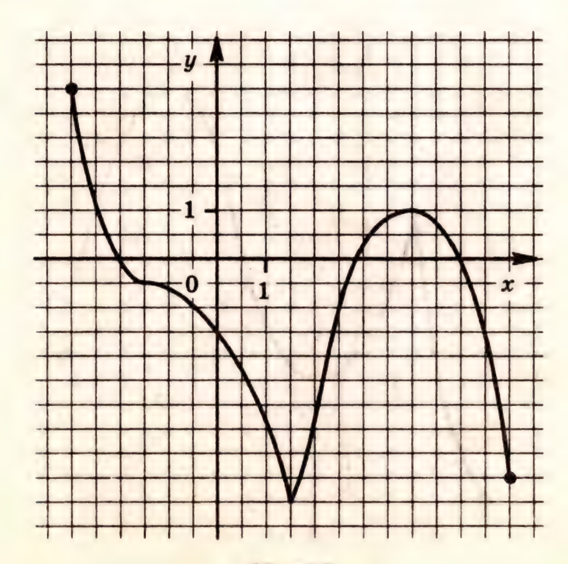


Рис. 24

Вариант 47

1. Решите неравенство

$$\frac{x(x+2)}{1-2x} > 0.$$

2. Решите уравнение

$$4 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x} = 5.$$

3. Решите уравнение

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2}.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 25). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \geqslant 3$;

в) точки экстремума функции;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Дана функция $f(x) = 3x^2 + 5x - 6$. Найдите координаты точки ее графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен -7.

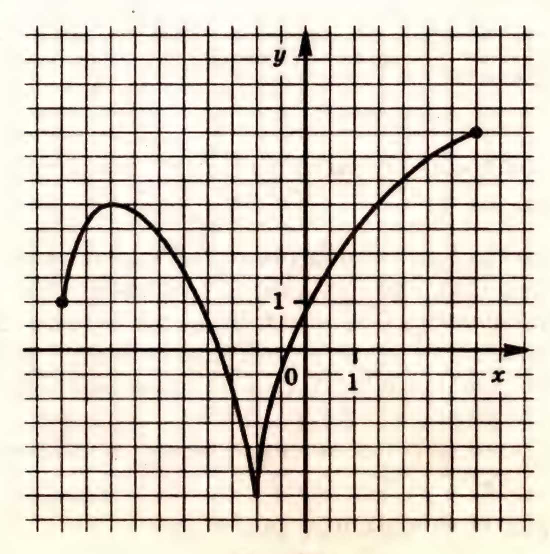


Рис. 25

Вариант 48

1. Вычислите $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{3}} + a^{\frac{2}{3}}}$ при $a = 3$.

2. Решите неравенство $\lg x + 2 \lg 2 < 0{,}5 \lg 49 - \lg 5$.

3. Решите уравнение $\cos(-x) = \cos\dfrac{\pi}{3}$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-5; 3]$;

в) функция убывает на промежутках $[-4; -1]$ и $[2; 3]$, возрастает на промежутке $[-1; 2]$;

г) нули функции: -2 и 2.

5. Найдите значение производной функции

$$f(x) = 3x + \sqrt{x} \text{ при } x = 16.$$

Вариант 49

1. Решите неравенство $\dfrac{(x + 10)(2x - 3)}{2x} > 0$.

2. Решите уравнение $4^{5x+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{6-4x}$.

3. Найдите корни уравнения $2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-2; 4]$;

в) производная функции на промежутке $(-1; 1)$ принимает положительные значения, а на промежутках $(-4; -1)$ и $(1; 3)$ — отрицательные значения;

г) график функции имеет единственную касательную, параллельную оси абсцисс.

5. Найдите все первообразные функции

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 1.$$

Вариант 50

1. Решите неравенство $\frac{16x^2 - x}{12 - x} < 0$.

2. Решите неравенство $\log_3 (2x - 1) < 3$.

3. Найдите корни уравнения $2 \cos x - 1 = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
а) область определения функции есть промежуток $[-3; 4]$;
б) значения функции составляют промежуток $[-4; 4]$;
в) производная функции на промежутке $(0; 2)$ принимает положительные значения, а на промежутках $(-3; 0)$ и $(2; 4)$ — отрицательные значения;
г) график функции имеет единственную касательную, параллельную оси абсцисс.

5. Найдите первообразную функции $f(x) = 10x^4 + x$, значение которой при $x = 0$ равно 6.

Вариант 51

1. Решите неравенство $\frac{5x^2 + 4x - 1}{7 - 2x} < 0$.

2. Решите уравнение $\lg (2 - x) = 2 \lg 4 - \lg 2$.

3. Докажите тождество $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
а) область определения функции есть промежуток $[-1; 6]$;
б) значения функции составляют промежуток $[-4; 4]$;
в) производная функции на промежутке $(1; 3)$ принимает отрицательные значения, а на промежутках $(-1; 1)$ и $(3; 6)$ — положительные значения;
г) прямые, параллельные оси абсцисс, касаются графика в точках $(1; 4)$ и $(3; -4)$.

5. Найдите производную функции $f(x) = e^x \cos x$.

Вариант 52

1. Решите неравенство $\frac{8 - 32x^2}{x - 10} > 0$.

2. Решите уравнение $3^{x+2} + 3^x = 810$.

3. Решите уравнение

$$\sin x + \sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1.$$

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-2; 5]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-2; 4]$;

в) производная функции на промежутке $(1; 3)$ принимает отрицательные значения, а на промежутках $(-2; 1)$ и $(3; 5)$ — положительные значения;

г) прямые, параллельные оси абсцисс, касаются графика в точках $(1; 4)$ и $(3; 1)$.

5. Найдите значение производной функции

$$f(x) = 4\sin x - \cos x$$

при $x = -\frac{\pi}{4}$.

Вариант 53

1. Найдите область определения функции $y = \lg\frac{x - 1}{8x + 1}$.

2. Решите неравенство $9 \cdot 3^{x-1} + 3^x < 36$.

3. Решите уравнение $2\cos^2 x - 1 = 0$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-1; 6]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-4; 4]$;

в) производная функции на промежутке $(1; 3)$ принимает положительные значения, а на промежутках $(-1; 1)$ и $(3; 6)$ — отрицательные значения;

г) прямые, параллельные оси абсцисс, касаются графика в точках $(1; -1)$ и $(3; 2)$.

5. Найдите производную функции $f(x) = x^2\ln x$.

Вариант 54

1. Вычислите $\dfrac{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}$ при $a = 4$, $b = 11$.

2. Решите неравенство $2 \lg x > 1$.

3. Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
а) область определения функции есть промежуток $[-1; 6]$;
б) значения функции составляют промежуток $[-4; 4]$;
в) производная функции на промежутках $(-1; 1)$ и $(1; 3)$ принимает положительные значения, а на промежутке $(3; 6)$ — отрицательные значения;
г) нули производной функции: 1 и 3.

5. Найдите производную функции $f(x) = 2x^2 + \sin x$.

Вариант 55

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg (2x^2 + 9x).$$

2. Найдите все целые решения неравенства

$$1 < 10^{x+1} \leqslant 1\,000\,000.$$

3. Найдите корни уравнения $\operatorname{tg} x + 1 = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
а) область определения функции есть промежуток $[-3; 5]$;
б) значения функции составляют промежуток $[-3; 4]$;
в) производная функции на интервалах $(-3; -1)$ и $(-1; 3)$ положительна, а на интервале $(3; 5)$ — отрицательна;
г) -1 — единственный нуль производной функции.

5. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 6 \sin x - \cos x$ в его точке с абсциссой $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Вариант 56

1. Вычислите $12^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}} \cdot (0,5)^{\frac{1}{3}}$.

2. Решите неравенство

$$2 \lg 0,5 + \lg x > \lg 5.$$

3. Решите уравнение

$$\cos(-x) = \sin\frac{\pi}{2}.$$

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
   а) область определения функции есть промежуток [−5; 3];
   б) значения функции составляют промежуток [−4; 2];
   в) производная функции на интервалах (−5; −3) и (−3; 0) отрицательна, а на интервале (0; 3) — положительна;
   г) −3 — единственный нуль производной функции.

5. Найдите все функции, имеющие производную, равную

$$x^2 - 4x.$$

Вариант 57

1. Решите неравенство

$$\frac{(x-5)(3x-1)}{9-x} > 0.$$

2. Решите уравнение $9^x = \left(\frac{1}{27}\right)^{2-x}$.

3. Найдите $\sin x$, если $\cos x = 0,6$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:
   а) область определения функции есть промежуток [−4; 3];
   б) значения функции составляют промежуток [−1; 4];
   в) функция возрастает на промежутке [−1; 1], убывает на промежутках [−4; −1] и [1; 3];
   г) нули функции: −1 и 2.

5. Найдите значение производной функции

$$f(x) = 6\sin x + \operatorname{tg} x \text{ при } x = -\frac{\pi}{6}.$$

Вариант 58

1. Решите неравенство

$$\frac{3x^2 + 4x}{9 - x} > 0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{0,25}(3x - 5) > -3.$$

3. Решите уравнение

$$2\cos\frac{x}{2} + 1 = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 26). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) > 0$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) координаты точек графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 1 + 8x - x^2$ на промежутке $[2; 5]$.

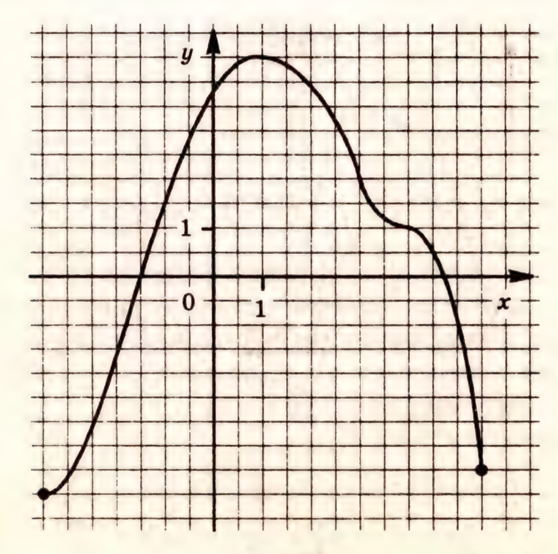


Рис. 26

Вариант 59

1. Решите неравенство

$$\frac{9-25x^2}{x+4}<0.$$

2. Решите уравнение

$$128\cdot 16^{2x+1}=8^{3-2x}.$$

3. Решите уравнение

$$\cos x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi+x)=0.$$

4. Функция $y=f(x)$ задана своим графиком (рис. 27). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x)>0$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) координаты точек графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=3x^2-12x+1$ на промежутке $[1; 4]$.

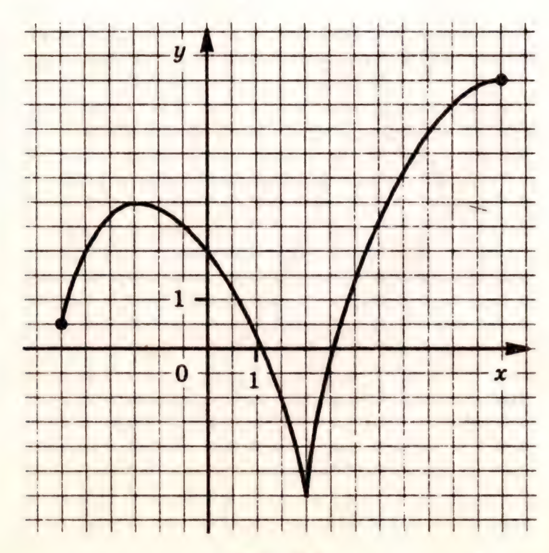


Рис. 27

4 – 5527

Вариант 60

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{6 + 3x} > 0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_5 (1 - 3x) \leqslant 2.$$

3. Докажите тождество

$$\frac{1 - 2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 28). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) > 0$;

в) промежутки, на которых производная принимает положительные, отрицательные значения;

г) координаты точек графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2.$$

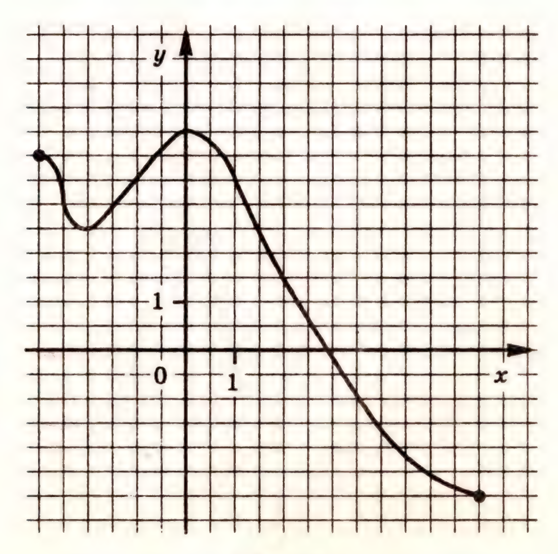


Рис. 28

Вариант 61

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg \frac{5 - 4x}{12x + 1}.$$

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{2 - x} > 9^{2x - 1}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,2x + 1 = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 29). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) > 0$;

в) промежутки, на которых производная принимает положительные, отрицательные значения;

г) точки экстремума функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите все первообразные функции

$$f(x) = x^5 + 2x.$$

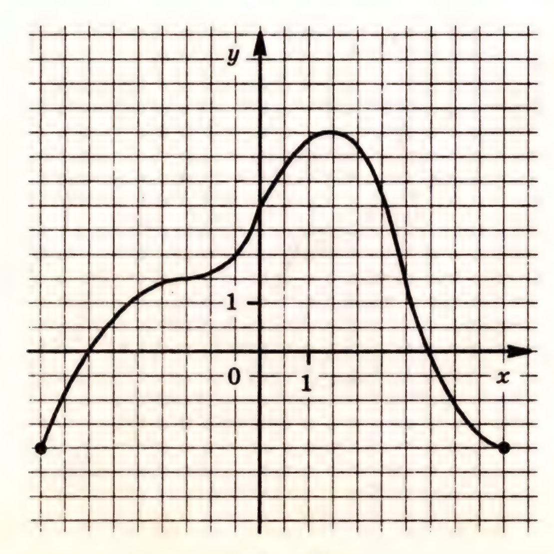


Рис. 29

Вариант 62

1. Вычислите $\frac{12^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{5}{3}}}{8^{-\frac{1}{6}}}$.

2. Решите неравенство

$$\lg 2x < 2 \lg 7 + 1.$$

3. Найдите все решения уравнения $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 30). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \leqslant -2$;

в) промежутки, на которых производная принимает положительные, отрицательные значения;

г) точки экстремума функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. К функции $y = 2\sin x + 3\cos x$ проведены касательные в точках с абсциссами $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Являются ли эти касательные параллельными прямыми?

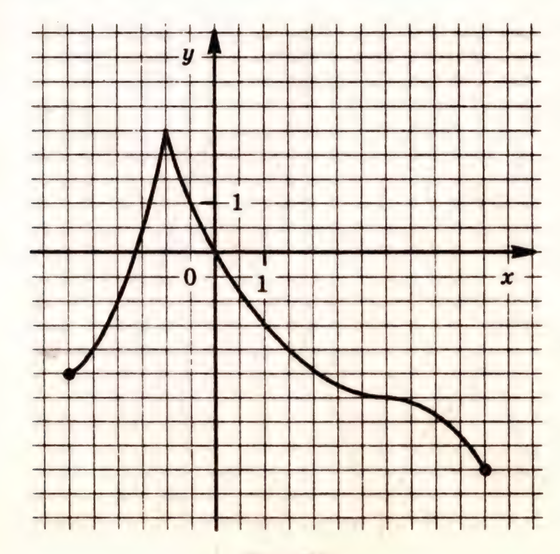


Рис. 30

Вариант 63

1. Вычислите $3^{2\log_9 12}$.

2. Найдите все целые решения неравенства

$$0{,}04 \leqslant 5^{2-x} \leqslant 25.$$

3. Докажите тождество

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 31). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \leqslant -2{,}5$;

в) промежутки, на которых производная $f'(x)$ принимает положительные, отрицательные значения;

г) точки экстремума функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите функции, имеющие производную

$$y = 3x + x^2.$$

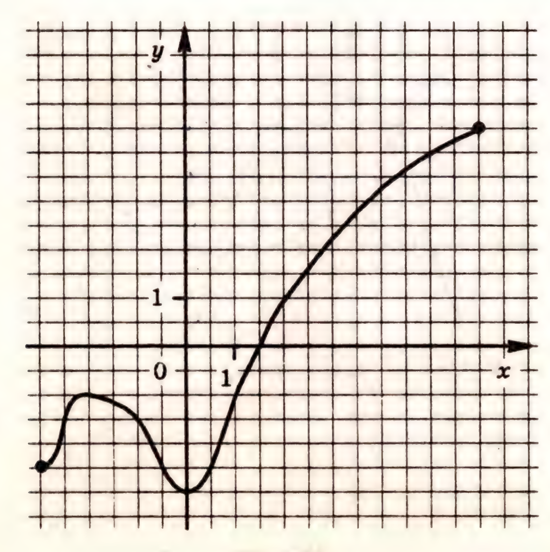


Рис. 31

Вариант 64

1. Решите неравенство

$$x^3 + 9x^2 + 14x < 0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{2}\lg 0{,}64 + \lg x > \lg 5.$$

3. Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

4. Функция $y = f(x)$ **задана своим графиком (рис. 32). Укажите:**

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) < -1$;

в) промежутки, на которых производная принимает положительные, отрицательные значения;

г) координаты точек графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите все функции, имеющие производную

$$y = x^2 - 3x.$$

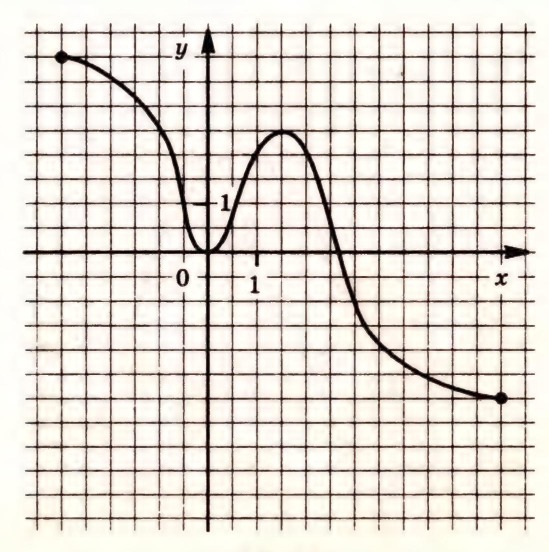


Рис. 32

Вариант 65

1. Решите неравенство

$$\frac{(x-6)(4x+7)}{9-x} \leqslant 0.$$

2. Решите уравнение $2^{7-5x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{2x+1} = 0.$

3. Найдите корни уравнения $3\,\mathrm{tg}\,x = -\sqrt{3}$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 33). Укажите:
   а) область определения функции;
   б) при каких значениях x $f(x) > 2$;
   в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
   г) координаты точек графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс;
   д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Дана функция $f(x) = 3 + 5x + 3x^2$. Найдите координаты точки ее графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен -7.

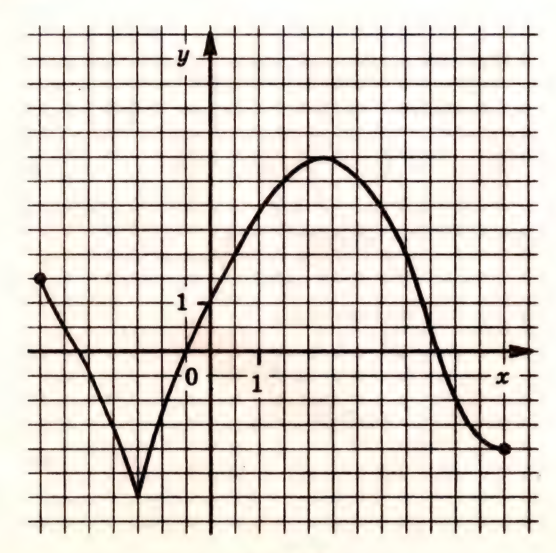


Рис. 33

Вариант 66

1. Вычислите $\frac{5^{\frac{3}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{12}}}{9^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{8^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{6}}}$.

2. Решите неравенство $\log_2 (1 - 2x) > 0$.

3. Найдите все решения уравнения $\sin x + 0{,}5 = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Изобразите график непрерывной функции $y = f(x)$, зная, что:

   а) область определения функции есть промежуток $[-3; 4]$;

   б) значения функции составляют промежуток $[-3; 3]$;

   в) $f'(x) > 0$ для любого x из промежутка $(-3; 0)$, $f'(x) < 0$ для любого x из промежутков $(0; 2)$ и $(2; 4)$, $f'(x) = 0$ при $x = 2$;

   г) нули функции: $x = -1$ и $x = 2$.

5. Найдите первообразную функции $f(x) = 5x + x^2$, график которой проходит через точку $(0; 3)$.

Вариант 67

1. Решите неравенство $\frac{2x^2 - 5x + 2}{x + 4} < 0$.

2. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}} (2x - 1) \geqslant -2$.

3. Найдите все корни уравнения

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0,$$

   принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Найдите производную функции $f(x) = x^3 \ln x$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной осями координат, графиком функции $f(x) = x^2 - 6x + 9$ и прямой $x = 2$.

Вариант 68

1. Решите неравенство $\frac{3x^2 - 12}{1 - 11x} > 0$.

2. Решите уравнение $\left(\frac{1}{6}\right)^{x+1} = 36^{x-1}$.

3. Решите уравнение $\sin x + \sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1$.

4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:
   а) область определения функции есть промежуток $[-5; 2]$;
   б) значения функции составляют промежуток $[-2; 5]$;
   в) $f'(x) < 0$ для любого x из промежутка $(-3; -1)$, $f'(x) > 0$ для любого x из промежутков $(-5; -3)$ и $(-1; 2)$, $f'(x) = 0$ при $x = -3$;
   г) нули функции: $x = -4$ и $x = -1$.

5. Найдите все первообразные функции $f(x) = 2x + x^3$.

Вариант 69

1. Вычислите $\frac{b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{5}{4}}}{b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{5}{4}}}$ при $b = 2$, $c = 5$.

2. Решите неравенство $\lg(3 - 2x) < 2$.

3. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0,$$

   принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:
   а) область определения функции есть промежуток $[-2; 4]$;
   б) значения функции составляют промежуток $[-4; 4]$;
   в) $f'(x)$ положительна на $(-2; 0)$ и на $(3; 4)$, отрицательна на $(0; 3)$, равна нулю при $x = 0$ и при $x = 3$;
   г) нули функции: -1 и 2.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной осями координат, графиком функции $f(x) = x^2 + 8x + 16$ и прямой $x = -2$.

Вариант 70

1. Вычислите $\left(27^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2\right)^{\frac{5}{6}}$.

2. Решите неравенство $\lg x + 0{,}5 \lg 16 < \lg 80 - \lg 2$.

3. Решите уравнение $\sin(-x) = \sin 2\pi$.

4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-5; 4]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-4; 5]$;

в) $f'(x) > 0$ для любого x из промежутка $(-1; 2)$, $f'(x) < 0$ для любого x из промежутков $(-5; -1)$ и $(2; 4)$, $f'(x) = 0$ при $x = 2$;

г) нули функции: -1 и 3.

5. Найдите первообразную функции $f(x) = 3x^2 - 5$, график которой проходит через точку $(2; 10)$.

Вариант 71

1. Вычислите $\left(72^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 36^{\frac{1}{6}} : 2^{\frac{4}{3}}$.

2. Решите неравенство $\log_6(5x - 2) > 3\log_6 2 + 2$.

3. Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{4}$.

4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-2; 5]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-5; 2]$;

в) $f'(x) > 0$ для любого x из промежутка $(3; 5)$, $f'(x) < 0$ для любого x из промежутков $(-2; 0)$ и $(0; 3)$, $f'(x) = 0$ при $x = 0$;

г) нули функции: $x = 0$ и $x = 4$.

5. Найдите какую-нибудь первообразную функции

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + 3,$$

которая принимает положительное значение при $x = -1$.

Вариант 72

1. Вычислите $8^{\frac{1}{3}\log_2 6}$.

2. Найдите все целые решения неравенства $\frac{1}{7} \leqslant 7^{x-3} < 49$.

3. Найдите решения уравнения $(\sin x - \cos x)^2 - 1 = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-3; 3]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-3; 4]$;

в) $f'(x) < 0$ для любого x из интервала $(-3; 0)$, $f'(x) > 0$ для любого x из интервалов $(0; 2)$ и $(2; 3)$, $f'(x) = 0$ при $x = 2$;

г) нули функции: $x = -1$ и $x = 2$.

5. Найдите все первообразные функции $f(x) = x^5 - x^2$.

Вариант 73

1. Решите неравенство $\frac{2x^2 + 5x - 3}{x - 3} < 0$.

2. Решите уравнение $\log_2(7x - 4) = 2 + \log_2 13$.

3. Найдите $\cos x$, если $\sin x = -0{,}8$, $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-4; 4]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-3; 5]$;

в) функция убывает на промежутках $[-4; -1]$ и $[2; 4]$, возрастает на промежутке $[-1; 2]$;

г) нули функции: -2 и 2.

5. Дана функция $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$. Найдите координаты точек ее графика, в которых касательные к нему параллельны оси абсцисс.

Вариант 74

1. Решите неравенство

$$\frac{8x^2 - 2x - 1}{x} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2 3 - \log_2 (2 - 3x) = 2 - \log_2 (4 - 3x).$$

3. Решите уравнение $3\text{tg}\, 2x - \sqrt{3} = 0$.

4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;

б) все значения функции составляют промежуток $[-3; 4]$;

в) $f'(x) < 0$ для любого x из промежутка $(-4; 0)$, $f'(x) > 0$ для любого x из промежутков $(0; 2)$ и $(2; 3)$, $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и при $x = 2$;

г) нули функции: $x = -1$ и $x = 2$.

5. Найдите все первообразные функции $f(x) = 3x^4 - 1$.

Вариант 75

1. Решите неравенство

$$\frac{(x - 11)(3x - 8)}{6 - x} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$2^{x+3} + 2^{x+1} - 7 \cdot 2^x = 48.$$

3. Найдите $\sin x$, если $\cos x = -\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

4. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 2\ln x$ в его точке с абсциссой $x = 2$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2 - 6x + 10$, прямыми $x = -1$, $x = 3$ и осью абсцисс.

Вариант 76

1. Решите неравенство

$$\frac{3x + 12x^2}{x + 4} > 0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_3 (12 - 5x) = 2.$$

3. Докажите тождество $\frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha} = 1.$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 34). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \geqslant 1$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) при каких значениях x $f'(x) = 0$;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите точки экстремума функции

$$f(x) = 3x^2 - 2x^3 + 6.$$

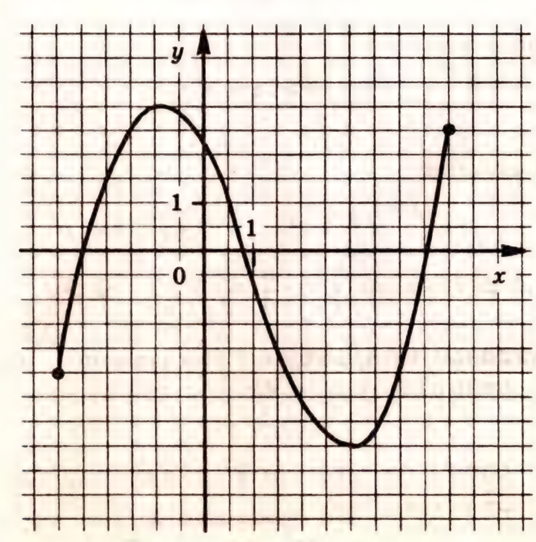


Рис. 34

Вариант 77

1. Решите неравенство

$$\frac{(x+5)(x-6)}{6x-1} \leqslant 0.$$

2. Решите уравнение

$$243 \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^{3x-2} = 27^{x+3}.$$

3. Найдите корни уравнения $2\cos x = -1$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 35). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \leqslant 2{,}5$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) при каких значениях x $f'(x) = 0$;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 5 - 8x - x^2$ на промежутке $[-6; -3]$.

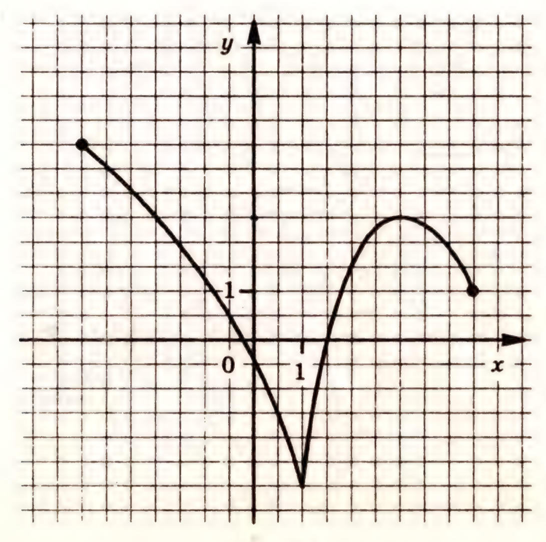


Рис. 35

Вариант 78

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 25}{6x + 1} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$16 \cdot 8^{2 + 3x} = 1.$$

3. Решите уравнение

$$\cos(3\pi + x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 36). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $1 \leqslant f(x) \leqslant 2{,}5$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) при каких значениях x $f'(x) = 0$;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите промежутки возрастания функции

$$y = x^3 + 3x^2 - 9x.$$

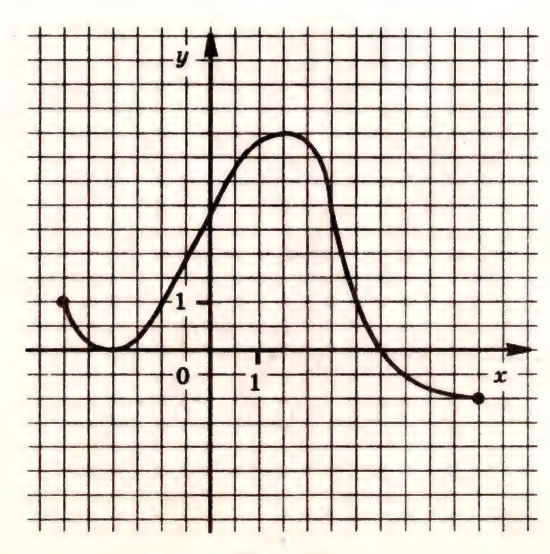


Рис. 36

Вариант 79

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 14x + 48}{x + 7} > 0.$$

2. Решите уравнение $\log_3 (4 - 2x) - \log_3 2 = 2$.

3. Найдите корни уравнения $\sin^2 x - \cos x = 1$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 37). Укажите:
   а) область определения функции;
   б) при каких значениях x $f(x) \geqslant 1$;
   в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;
   г) точки, касательные в которых параллельны оси абсцисс;
   д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S от начальной точки изменяется по закону

$$S = 12t - 3t^2 \text{ (м)},$$

где t — время движения в секундах. Через сколько секунд после начала движения тело остановится?

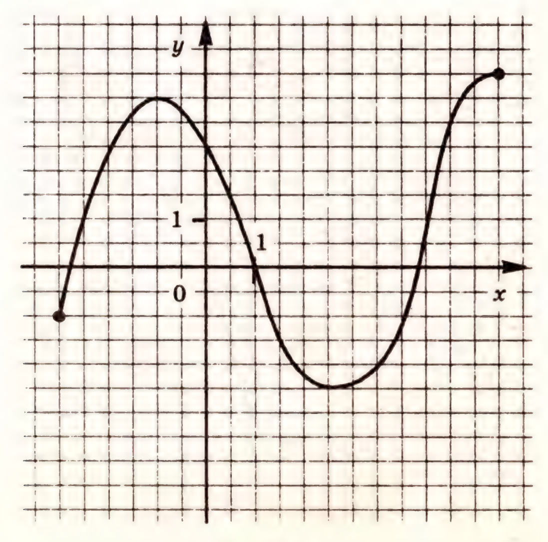


Рис. 37

Вариант 80

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg \frac{3x + 1}{x - 4}.$$

2. Решите неравенство $10^{3x+1} > 0{,}001$.

3. Найдите все решения уравнения $3\,\mathrm{tg}^2\, x - 1 = 0$, принадлежащие промежутку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 38). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \geqslant 1$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) точки, касательные в которых параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S от него до некоторой точки A этой прямой изменяется по закону

$$S = 1 + 4t - t^2 \text{ (м)},$$

где t — время движения в секундах. Через какое время после начала движения тело остановится?

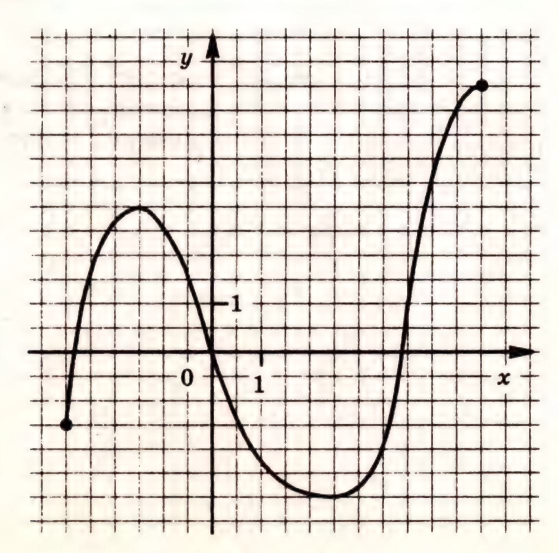


Рис. 38

5 – 5527

Вариант 81

1. Вычислите $\left(27^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}$.

2. Решите неравенство

$$\log_{0,5}(2x+1) > -2.$$

3. Докажите тождество $\frac{1+\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 39). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \geqslant 1$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) точки, касательные в которых параллельны оси абсцисс;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Дана функция $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$. Найдите координаты точки ее графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен 3.

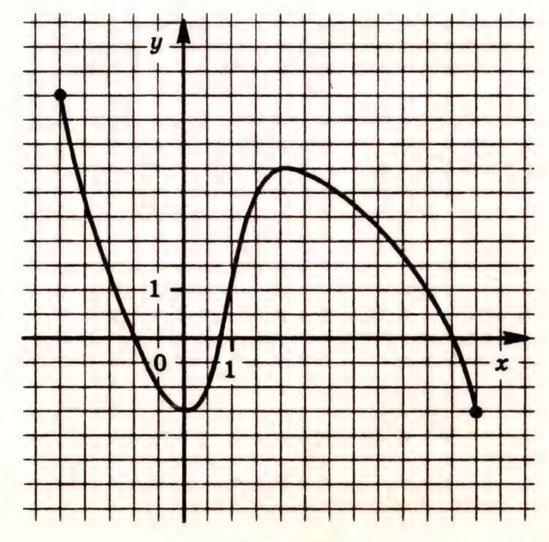


Рис. 39

Вариант 82

1. Вычислите $7^{-2\log_7 5}$.

2. Найдите все целые решения неравенства

$$\frac{1}{8} < 2^{x-1} \leqslant 16.$$

3. Решите уравнение

$$2\sin x - \sin^2 x = \cos^2 x.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 40). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \geqslant 3$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) при каких значениях x $f'(x) = 0$;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Дана функция $f(x) = 1 - 5x + 3x^2$. Найдите координаты точки ее графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен 1.

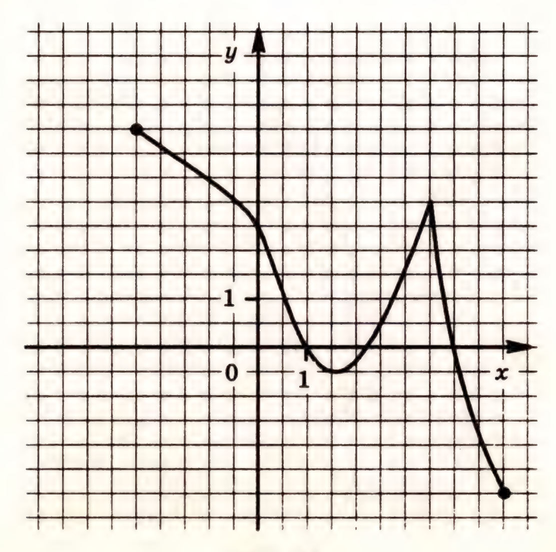


Рис. 40

Вариант 83

1. Вычислите $\dfrac{2a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 3a^{-\frac{1}{3}}}$ при $a = 4$.

2. Решите неравенство

$$\log_3(5x - 6) < \log_3 2 + 3.$$

3. Решите уравнение

$$\sin(\pi + x) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 41). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) < -1$;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) при каких значениях x $f'(x) = 0$;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите производную функции

$$f(x) = x^2 \ln x.$$

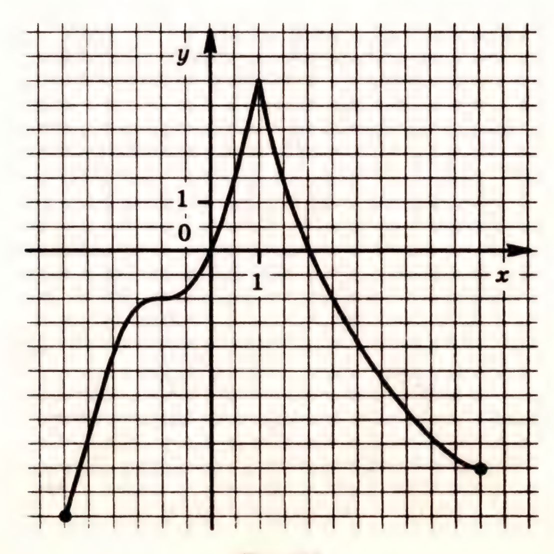


Рис. 41

Вариант 84

1. Решите неравенство

$$\frac{(x-2)(x-9)}{4x-5} \geqslant 0.$$

2. Решите уравнение $2 \cdot 5^{x+2} - 10 \cdot 5^x = 8$.

3. Решите уравнение $2 \cos (\pi + 2x) = 1$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 42). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \leqslant -1$;

в) при каких значениях x $f'(x) = 0$;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S до него от некоторой точки A этой прямой изменяется по закону

$$S = 4 + 3t - 0{,}5t^2 \text{ (м)},$$

где t — время движения в секундах. Через сколько секунд после начала движения тело остановится?

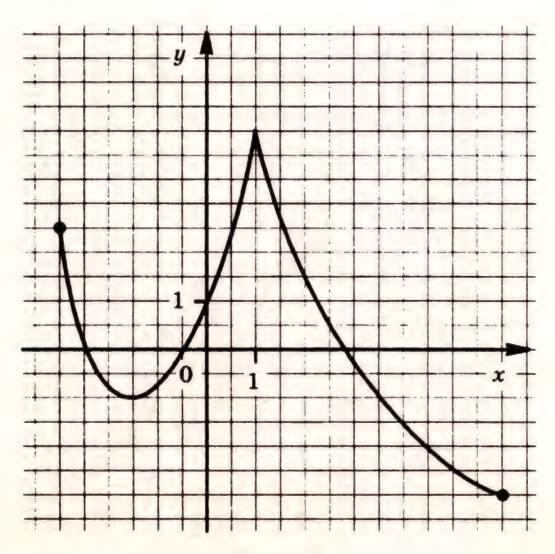


Рис. 42

Вариант 85

1. Решите неравенство

$$\frac{9x^2-1}{x-6} > 0.$$

2. Решите уравнение

$$25^{1-3x} = \frac{1}{125}.$$

3. Решите уравнение $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 43). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \geqslant 3{,}5$;

в) при каких значениях x $f'(x) = 0$;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите первообразную функции $f(x) = 4 - x^2$, график которой проходит через точку $(-3; 10)$.

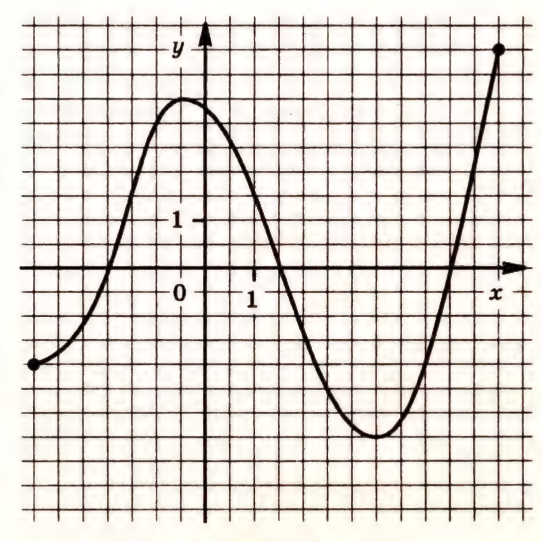


Рис. 43

Вариант 86

1. Вычислите $\dfrac{a^{\frac{7}{3}} + a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}$ при $a = 2$.

2. Решите неравенство

$$\log_7 (2x - 1) < 2.$$

3. Решите уравнение $\cos(\pi + x) = \sin \frac{\pi}{2}$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-3; 2]$;

в) функция возрастает на промежутках $[-4; -2]$ и $[-1; 3]$, убывает на промежутке $[-2; -1]$;

г) значения функции отрицательны только в точках промежутков $[-4; -2)$ и $(-2; 1)$.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S до него от некоторой точки A этой прямой изменяется по закону

$$S = 0{,}5t^2 + 3t + 2 \text{ (м)},$$

где t — время движения в секундах. Через какое время после начала движения скорость тела окажется равной 15 м/с?

Вариант 87

1. Вычислите $16^{0{,}5 \log_4 10}$.

2. Найдите все целые решения неравенства

$$0{,}5 < 2^{1-x} \leqslant 32.$$

3. Решите уравнение $\sin x - \sin^2 x = \cos^2 x$.

4. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$ в его точке с абсциссой $x = -1$.

5. Найдите промежутки убывания функции

$$y = -x^3 + 9x^2 + 21x.$$

Вариант 88

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg \frac{3x + 1}{1 - 3x}.$$

2. Решите неравенство $\left(\frac{1}{25}\right)^{2 - x} < 125^{x + 1}$.

3. Докажите тождество $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha \cos^2\alpha}$.

4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:
   а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;
   б) значения функции составляют промежуток $[-3; 4]$;
   в) $f'(x) > 0$ для любого x из промежутка $(-4; 0)$, $f'(x) < 0$ для любого x из промежутков $(0; 2)$ и $(2; 3)$, $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и при $x = 2$;
   г) нули функции: $x = -1$ и $x = 2$.

5. Найдите первообразную функции $f(x) = 5x + 7$, график которой проходит через точку $(-2; 4)$.

Вариант 89

1. Вычислите $\dfrac{9a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{9}{5}} + 2a^{-\frac{1}{5}}}$ при $a = 5$.

2. Решите неравенство $\lg(0{,}5x) < -2$.

3. Найдите $\cos x$, если $\sin x = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:
   а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;
   б) значения функции составляют промежуток $[-3, 3]$;
   в) $f'(x) < 0$ для любого x из промежутка $(-3; -1)$, $f'(x) > 0$ для любого x из промежутков $(-4; -3)$ и $(-1; 3)$, $f'(x) = 0$ при $x = -3$;
   г) нули функции: -3 и 1.

5. Найдите первообразную функции $f(x) = x - x^2$, график которой проходит через точку $(2; 10)$.

Вариант 90

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg \frac{x+1}{2x-1}.$$

2. Решите неравенство

$$32^{2x+3} < 0{,}25.$$

3. Решите уравнение

$$4\sin^2 x = 3.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 44). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $-1{,}5 \leqslant f(x) \leqslant 4$;

в) при каких значениях x $f'(x) = 0$;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Для какой из функций

$$f(x) = 6(x^2 - 1), \quad g(x) = 6x^2 - 6x + 1 \text{ и } q(x) = 6x(x-1)$$

функция $F(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ является первообразной?

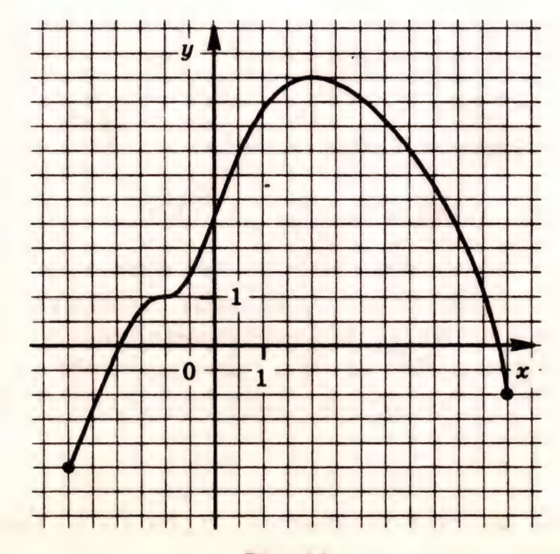


Рис. 44

Вариант 91

1. Вычислите $3^{\frac{1}{2}\log_3 4}$.

2. Найдите все целые решения неравенства

$$\frac{1}{3} < 3^{3+x} < 9.$$

3. Решите уравнение

$$\cos x + \cos^2 x = \frac{1}{2} - \sin^2 x.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 45). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $-1 \leqslant f(x) < 2$;

в) при каких значениях x $f'(x) = 0$;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. К графику функции $f(x) = 1 - 5x - x^2$ проведена касательная с угловым коэффициентом 9. Найдите координаты точки касания.

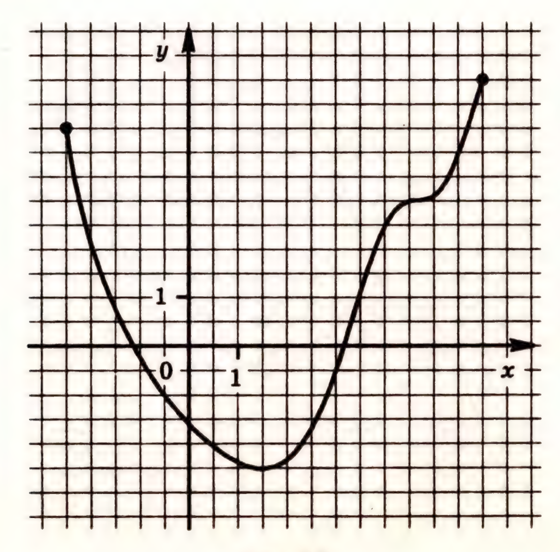


Рис. 45

Вариант 92

1. Решите неравенство

$$\frac{x(4x-11)}{x-7} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$16^{5-3x} = 0{,}125^{5x-6}.$$

3. Докажите тождество

$$\sin^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 46). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \geqslant 4$;

в) промежутки, на которых производная $f'(x)$ принимает положительные, отрицательные значения;

г) точки экстремума функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите значение производной функции $f(x) = x^3 \ln x$ при $x = 4$.

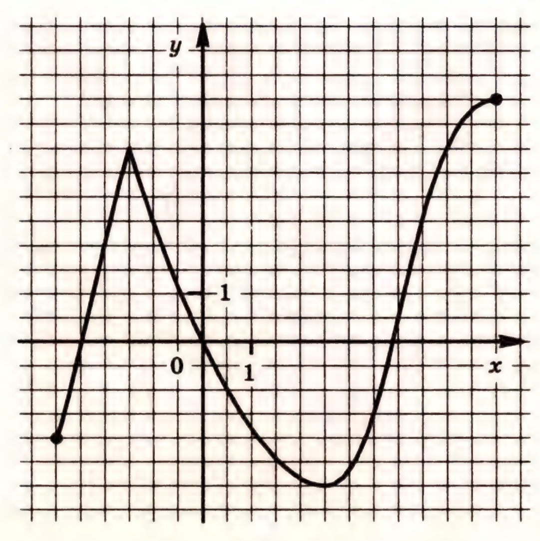


Рис. 46

Вариант 93

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 19x + 84}{2(x-5)} > 0.$$

2. Решите уравнение

$$\lg(5x+2) = \frac{1}{2}\lg 36 + \lg 2.$$

3. Докажите тождество $1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 47). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) \leqslant -2$;

в) координаты точек, в которых касательные к графику параллельны оси абсцисс;

г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $f(x) = -x^2 + 5x$.

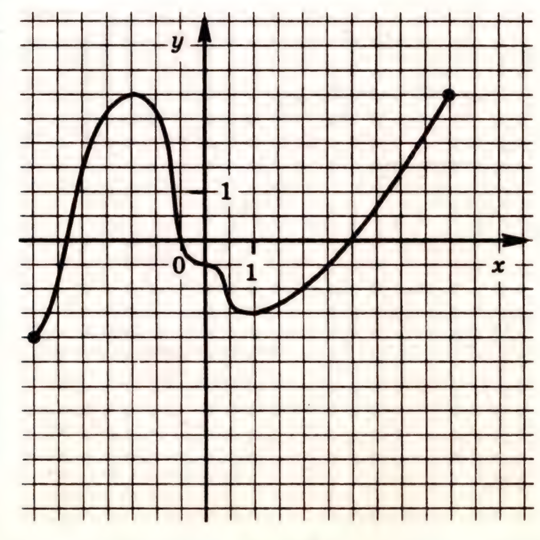


Рис. 47

Вариант 94

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg \frac{4 - 5x}{x - 3}.$$

2. Решите неравенство

$$3^{x-3} + \frac{1}{3} \cdot 3^x > 10.$$

3. Решите уравнение

$$2\sin^2 x - 1 = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 48). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) > 0$;

в) промежутки, на которых производная принимает положительные, отрицательные значения;

г) точки экстремума функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите все функции, имеющие производную

$$y' = 2x - x^2.$$

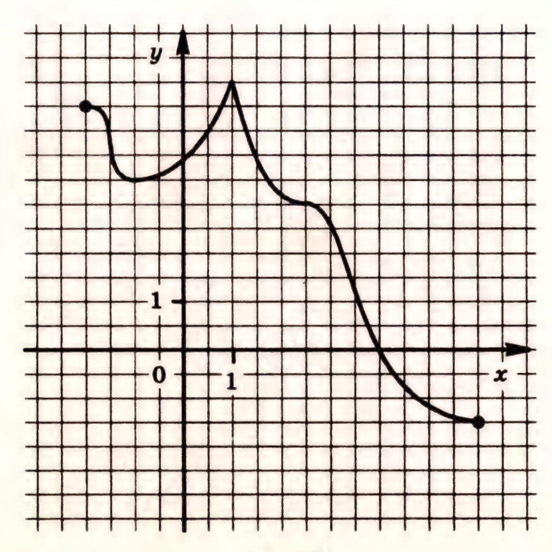


Рис. 48

Вариант 95

1. Найдите область определения функции

$$y = \lg (x^2 - 8x).$$

2. Найдите все целые решения неравенства

$$6 \leqslant 6^{1-x} < 216.$$

3. Решите уравнение

$$\sin^2 x - 0{,}25 = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 49). Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x $f(x) < 0$;

в) промежутки, на которых производная принимает положительные, отрицательные значения;

г) точки экстремума функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Какие из данных функций возрастают на всей области определения:

$$y = 6x,\ y = -3x + 1,\ y = -3x^2,\ y = x^3 + x?$$

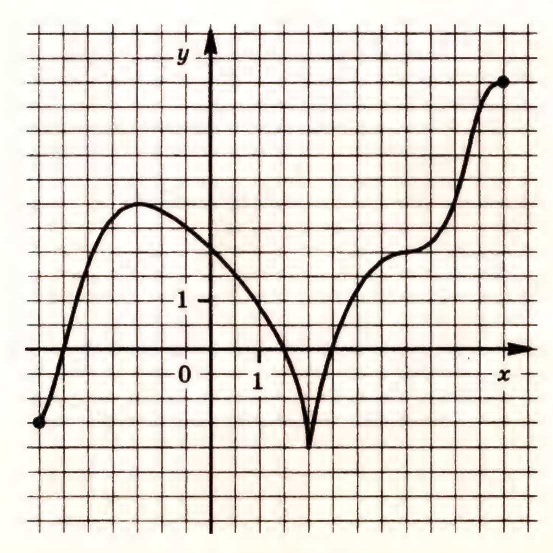


Рис. 49

Вариант 96

1. Решите неравенство

$$\frac{7x + x^2}{12x - 1} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) - \log_{\frac{1}{2}} 16 = 5.$$

3. Доказать тождество $\sin^2\alpha + \text{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

4. Изобразите график непрерывной функции, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток [−3; 4];

б) значения функции составляют промежуток [−5; 2];

в) функция убывает на промежутках [−3; −1] и [2; 4], возрастает на промежутке [−1; 2];

г) нули функции: −1 и 3.

5. Тело движется по прямой так, что расстояние S до него от некоторой точки A этой прямой изменяется по закону

$$S = 0{,}5t^2 - 3t + 8 \text{ (м)},$$

где t — время движения в секундах. Найдите минимальное расстояние, на которое тело приблизится к точке A.



Задания 6, 7 для экзамена «Математика»

Вариант 1

6. Туго натянутая нить последовательно закреплена в точках 1, 2, 3, 4 и 5, расположенных на стержнях SA, SB и SC, которые не принадлежат одной плоскости (рис. 50). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых отрезки нити соприкасаются.

7. Отрезок AM перпендикулярен плоскости квадрата $ABCD$, $\angle ABM = 30°$. Найдите тангенс угла ACM.

Вариант 2

6. Туго натянутая нить последовательно закреплена в точках 1, 2, 3, 4, 5 и 6, расположенных на стержнях SA, SB и SC, котоые не принадлежат одной плоскости (рис. 51). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых отрезки нити соприкасаются.

7. Сторона квадрата равна 4 см. Точка, равноудаленная от всех вершин квадрата, находится на расстоянии 6 см от точки пересечения его диагоналей. Найдите расстояния от этой точки до вершин квадрата.

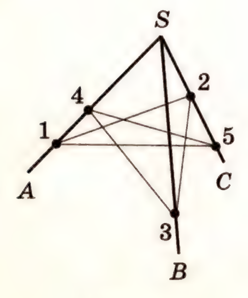


Рис. 50

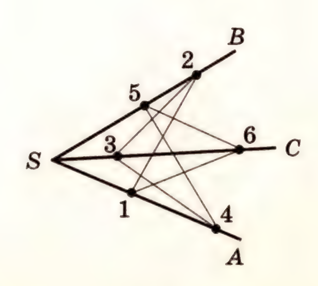


Рис. 51

Вариант 3

6. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ из вершины D' проведены диагонали граней $D'A$, $D'B'$ и $D'C$. Сделайте рисунок. Как называется многогранник с вершинами D', A, B', C? Имеет ли этот многогранник равные ребра? равные грани?

7. Треугольник ABC — прямоугольный и равнобедренный с прямым углом C и гипотенузой 4 см. Отрезок CM перпендикулярен плоскости треугольника и равен 2 см. Найдите расстояние от точки M до прямой AB.

Вариант 4

6. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ отмечены следующие точки: K — центр грани $BCC'B'$, L — центр грани $DCC'D'$ и M — центр грани $ABCD$. Сделайте рисунок. Как называется многогранник $CKLM$? Имеет ли этот многогранник равные ребра? равные грани?

7. Радиус основания цилиндра равен 4 см, площадь боковой поверхности вдвое больше площади основания. Найдите объем цилиндра.

Вариант 5

6. Точки пересечения высот всех граней правильной треугольной пирамиды являются вершинами некоторого многогранника. Как называется этот многогранник? Имеет ли он равные ребра? равные грани?

7. Отрезок AB имеет с плоскостью α единственную общую точку A. Точка C делит его в отношении $2:1$, считая от точки A. Через точки C и B проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках C_1 и B_1. Длина отрезка AC_1 равна 12 см. Найдите длину отрезка AB_1.

6 – 5527

Вариант 6

6. Вершинами некоторого многогранника являются центр верхней грани куба и середины всех сторон нижней его грани. Как называется этот многогранник? Сделайте рисунок и обозначьте равные ребра многогранника; укажите, какие грани этого многогранника равны между собой.

7. Треугольник ABC — прямоугольный и равнобедренный с прямым углом C и гипотенузой 6 см. Отрезок CM перпендикулярен плоскости треугольника; расстояние от точки M до прямой AB равно 5 см. Найдите длину отрезка CM.

Вариант 7

6. Плоскости α и β, изображенные на рисунке 52, пересекаются по прямой MN. Точка A лежит в плоскости α, а точка B — в плоскости β. Определите, каково взаимное расположение прямых AM и BN.

7. Основание прямой призмы — равнобочная трапеция, одно из оснований которой в два раза больше другого. Непараллельные боковые грани призмы — квадраты. Высота призмы равна 6 см. Площадь боковой поверхности призмы равна 144 см^2. Вычислите объем призмы.

Вариант 8

6. На какие многогранники разбивает призму $ABCA'B'C'$ плоскость, проходящая через вершины A, B и C'? Сделайте рисунок.

7. Отрезок AB имеет с плоскостью α единственную общую точку A. Через его середину C и точку B проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках C_1 и B_1. Длина отрезка AC_1 равна 8 см. Найдите длину отрезка AB_1.

Вариант 9

6. Изображенные на рисунке 53 прямые a и b пересекают параллельные плоскости α и β соответственно в точках A, B и A', B'. Определите, каково взаимное расположение прямых a и b.

7. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетом 3 см и прилежащим углом $30°$ вокруг меньшего катета.

Вариант 10

6. Сечение параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ проведено через точки A, B и середину ребра CC'. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны многоугольника.

7. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12 см, а высота боковой грани — 15 см. Найдите боковое ребро.

Вариант 11

6. Сечение параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ проведено через середины ребер AB, AD и $A'B'$. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.

7. Площадь осевого сечения цилиндра равна 20 см^2. Найдите площадь его боковой поверхности.

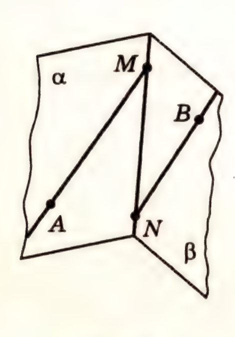


Рис. 52

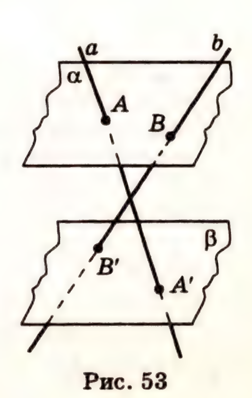


Рис. 53

Вариант 12

6. Куб $ABCDA'B'C'D'$ рассечен на два многогранника плоскостью, проходящей через середину ребра BB' перпендикулярно диагонали $A'C$. Каким многоугольником является сечение? Какие особенности имеет этот многоугольник?

7. Середина C отрезка AB принадлежит плоскости α. Через концы отрезка AB проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 и B_1. Длина отрезка A_1C равна 8 см. Найдите длину отрезка A_1B_1.

Вариант 13

6. Изображенные на рисунке 54 прямые a и b пересекают параллельные плоскости α и β соответственно в точках A, B и A', B'. Скопируйте рисунок и определите, каково взаимное расположение прямых a и b.

7. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетом 6 см и гипотенузой 10 см вокруг большего катета.

Вариант 14

6. Куб рассечен плоскостью, проходящей через середины двух смежных сторон нижнего основания и центр верхнего основания. Как называется многоугольник, полученный в сечении? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.

7. Треугольник ABC — прямоугольный и равнобедренный с прямым углом C и гипотенузой 8 см. Отрезок CM перпендикулярен плоскости треугольника и равен 3 см. Найдите расстояние от точки M до прямой AB.

Вариант 15

6. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ проведено сечение через середины ребер AA' и CC' и вершину B. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны многоугольника.

7. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Высота пирамиды проходит через середину гипотенузы треугольника и равна гипотенузе. Найдите боковые ребра пирамиды.

Вариант 16

6. Изображенные на рисунке 55 плоскости α и β параллельны. Отрезок AB лежит в плоскости α, а отрезок CD — в плоскости β. Определите, каково взаимное расположение прямых AC и BD.

7. Если боковую поверхность конуса разрезать по образующей и развернуть на плоскости, то получится круговой сектор с радиусом 4 см и центральным углом 120°. Найдите объем этого конуса.

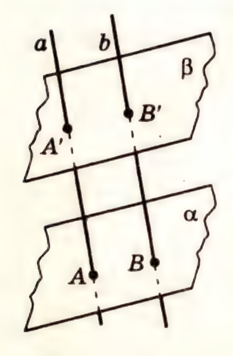


Рис. 54

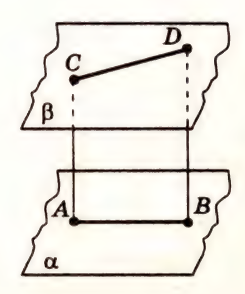


Рис. 55

Вариант 17

6. Туго натянутая нить последовательно закреплена в точках 1, 2, 3, 4, 5 и 6, расположенных на четырех попарно параллельных стержнях a, b, c и d, никакие три из которых не принадлежат одной и той же плоскости (рис. 56). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых отрезки нити соприкасаются.

7. Плоскость проходит на расстоянии 8 см от центра шара. Радиус сечения равен 15 см. Найдите площадь поверхности шара.

Вариант 18

6. Точки M и N расположены на ребрах треугольной пирамиды (рис. 57). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра пирамиды.

7. Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $8\sqrt{2}$ см. Найдите объем цилиндра.

Вариант 19

6. Точки M и N расположены на ребрах треугольной пирамиды (рис. 58). Скопируйте рисунок, отметьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра пирамиды.

7. Найдите площадь боковой поверхности тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетом 3 см и противолежащим углом 30° вокруг большего катета.

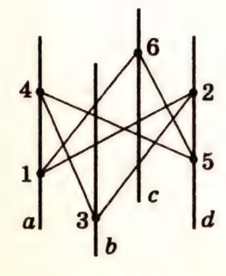


Рис. 56

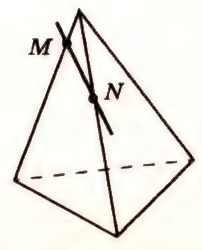


Рис. 57

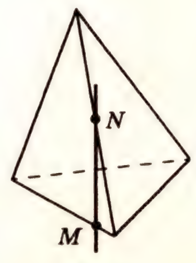


Рис. 58

Вариант 20

6. Продолжение отрезка BC, изображенного на рисунке 59, пересекает плоскость α в точке E. Отрезок AD лежит в плоскости α. Скопируйте рисунок и изобразите отрезки AC и BD. Определите, пересекаются ли эти отрезки.

7. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетом 6 см и острым углом 45°. Объем призмы равен 108 см^3. Найдите площадь полной поверхности призмы.

Вариант 21

6. Отрезки AB и CD, изображенные на рисунке 60, лежат в двух пересекающихся плоскостях α и β. Скопируйте рисунок и определите, каково взаимное расположение прямых AD и BC.

7. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 15 см, а один из катетов — 9 см. Найдите площадь сечения, проведенного через середину высоты пирамиды параллельно ее основанию.

Вариант 22

6. На какие многогранники разбивается параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ плоскостью, проходящей через вершины A, B' и D? Какие особенности имеют эти многогранники? Сделайте рисунок.

7. Сторона квадрата равна 4 см. Точка, не принадлежащая плоскости квадрата, удалена от каждой из его вершин на расстояние 6 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости квадрата.

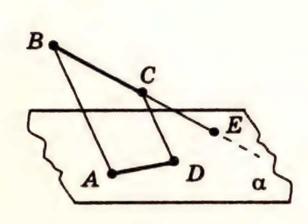


Рис. 59

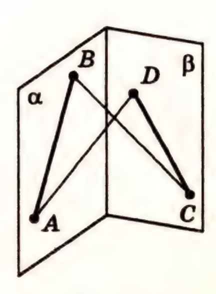


Рис. 60

Вариант 23

6. Изображенные на рисунке 61 плоскости α и β параллельны. Отрезок AB лежит в плоскости α, а отрезок CD в плоскости β. Определите, каково взаимное расположение прямых AD и BC.

7. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Все боковые ребра равны 13 см. Найдите объем пирамиды.

Вариант 24

6. Туго натянутая нить последовательно закреплена в точках 1, 2, 3, 4, 5 и 6, расположенных на параллельных стержнях a, b и c, не принадлежащих одной и той же плоскости (рис. 62). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых отрезки нити соприкасаются.

7. Основание пирамиды — ромб с диагоналями 6 см и 8 см. Высота пирамиды опущена в точку пересечения его диагоналей. Меньшие боковые ребра пирамиды равны 5 см. Найдите объем пирамиды.

Вариант 25

6. В кубе проведено сечение через середины двух смежных сторон верхнего основания и центр нижнего. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.

7. Объем шара равен 36π см^3. Найдите площадь поверхности шара.

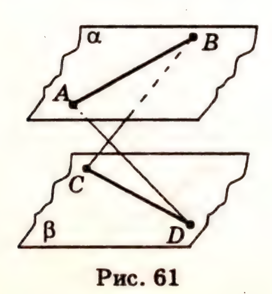


Рис. 61

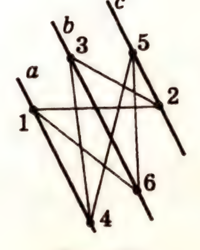


Рис. 62

Вариант 26

6. Сечение правильной треугольной призмы проходит через центры оснований и одну из вершин. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.

7. Три смежных ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны и равны 6 см, 6 см и 8 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант 27

6. Точки K, L, M и N лежат на ребрах изображенной на рисунке 63 пирамиды. Скопируйте рисунок и определите, имеют ли отрезки KN и LM общую точку.

7. Сумма площадей поверхностей двух шаров радиуса 4 см равна площади поверхности некоторого большего шара. Каков объем этого большего шара?

Вариант 28

6. Точки K, L, M и N лежат на ребрах изображенной на рисунке 64 прямой призмы. Скопируйте рисунок и определите, каково взаимное расположение прямых KM и LN.

7. Найдите площадь полной поверхности тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6 см и 10 см вокруг его оси симметрии, параллельной большей стороне.

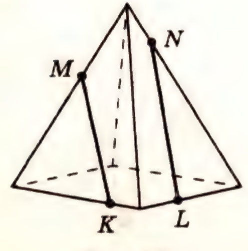


Рис. 63

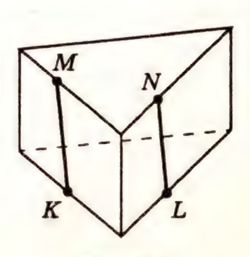


Рис. 64

Вариант 29

6. Точки M и N расположены на ребрах четырехугольной пирамиды (рис. 65). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра пирамиды.

7. Образующая конуса равна 12 см и составляет с плоскостью основания угол 30°. Найдите объем конуса.

Вариант 30

6. Точки M и N расположены на ребрах четырехугольной пирамиды (рис. 66). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра пирамиды.

7. Найдите площадь полной поверхности тела, полученного при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом 8 см вокруг его оси симметрии.

Вариант 31

6. Вершинами многогранника являются середины сторон основания и середина высоты правильной четырехугольной пирамиды. Как называется этот многогранник? Сделайте рисунок и отметьте равные ребра этого многогранника.

7. Площадь боковой поверхности конуса равна 20π см^2, а площадь его основания на 4π см^2 меньше. Найдите объем конуса.

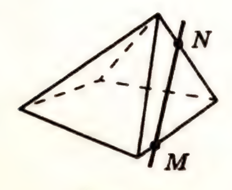


Рис. 65

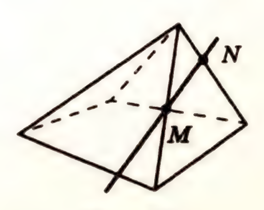


Рис. 66

Вариант 32

6. Точки M и N расположены на ребрах четырехугольной пирамиды (рис. 67). Скопируйте рисунок, отметьте и постройте точку, в которой прямая MN пересекает плоскость основания пирамиды.

7. Объем конуса с радиусом основания 6 см равен 96π см^3. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Вариант 33

6. Точки M и N расположены на ребрах четырехугольной пирамиды (рис. 68). Скопируйте рисунок, отметьте и постройте точки, в которой прямая MN пересекает прямые, содержащие ребра пирамиды.

7. Отрезок AB пересекает плоскость α в точке C, которая делит его в отношении 3 : 1, считая от точки A. Через концы отрезка AB проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 и B_1. Длина отрезка A_1C равна 15 см. Найдите длину отрезка A_1B_1.

Вариант 34

6. Точки K, L и M принадлежат ребрам изображенной на рисунке 69 пирамиды $SABCD$. Скопируйте рисунок и отметьте точку N на ребре CD так, чтобы отрезки KN и LM имели общую точку.

7. Высота конуса равна 12 см, а угол при вершине осевого сечения равен 120°. Найдите площадь полной поверхности конуса.

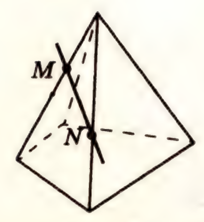


Рис. 67

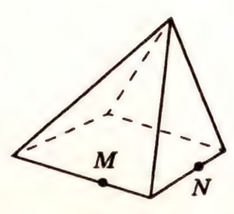


Рис. 68

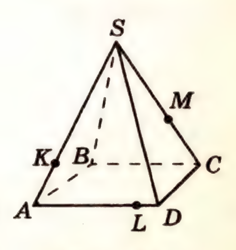


Рис. 69

Вариант 35

6. Точки M и N расположены на ребрах куба (рис. 70). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра куба.

7. Прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см в первый раз вращается вокруг большего катета, а во второй — вокруг меньшего. Сравните площади боковых поверхностей получающихся при этом конусов.

Вариант 36

6. Точки M и N расположены на ребрах куба (рис. 71). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра куба.

7. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 10 см, а боковое ребро — 13 см. Найдите высоту пирамиды.

Вариант 37

6. Куб $ABCDA'B'C'D'$ рассечен на два многогранника плоскостью, проходящей через середину ребра BB' перпендикулярно диагонали BD'. Каким многоугольником является сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.

7. Радиус основания цилиндра равен 8 см, площадь боковой поверхности вдвое меньше площади основания. Найдите объем цилиндра.

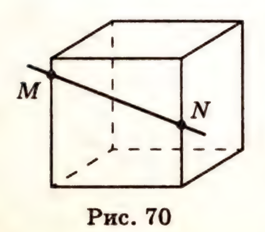


Рис. 70

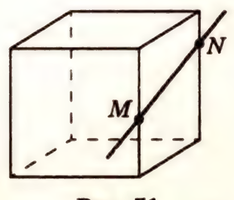


Рис. 71

Вариант 38

6. Точки K, L, M и N принадлежат ребрам изображенной на рисунке 72 пирамиды, причем K и L — середины ребер. Скопируйте рисунок и определите, пересекаются ли прямые KL и MN, отрезки KN и LM.

7. Площадь осевого сечения цилиндра равна 108 см^2, а его образующая в три раза меньше диаметра основания. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Вариант 39

6. Точки M и N расположены на ребрах куба (рис. 73). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра куба.

7. Найдите площадь полной поверхности тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетами 3 см и 4 см вокруг большего катета.

Вариант 40

6. Точки M и N расположены на ребрах треугольной пирамиды (рис. 74). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра пирамиды.

7. Радиус основания цилиндра равен 6 см, высота в два раза меньше длины окружности основания. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

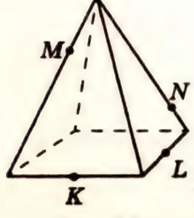



Рис. 72

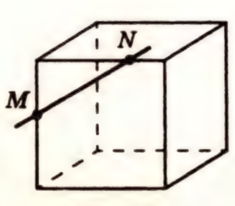


Рис. 73

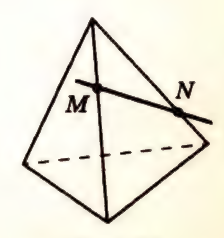


Рис. 74

Вариант 41

6. Точки K и L — вершины куба, изображенного на рисунке 75, точки M и N — середины его ребер. Определите, пересекаются ли отрезки KN и LM.

7. Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольника со сторонами 4 см и 6 см вокруг прямой, проходящей через середины его бо́льших сторон.

Вариант 42

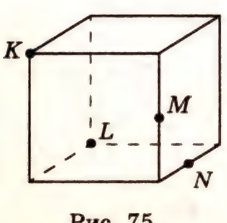
6. Точки K, L, M и N принадлежат ребрам изображенной на рисунке 76 пирамиды. Скопируйте рисунок и определите, пересекаются ли прямые KL и MN, отрезки KN и LM.

7. Сторона квадрата $ABCD$ равна 2 см. Отрезок AM перпендикулярен плоскости квадрата, $\angle ABM = 60°$. Найдите расстояние от точки M до прямой BD.

Вариант 43

6. Точки пересечения диагоналей всех граней правильной четырехугольной призмы являются вершинами некоторого многогранника. Сделайте рисунок и отметьте равные ребра этого многогранника.

7. Отрезок AB имеет с плоскостью α единственную общую точку A. Точка C делит отрезок AB в отношении 3 : 2, считая от точки A. Через точки C и B проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках C_1 и B_1. Длина отрезка AB_1 равна 15 см. Найдите длину отрезка AC_1.



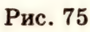


Рис. 75

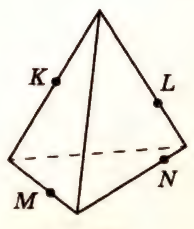


Рис. 76

Вариант 44

6. На рисунке 77 изображены пересекающиеся плоскости α и β. Точки A и B принадлежат плоскости α, а точка C лежит в плоскости β. Скопируйте рисунок и изобразите на нем точку D, принадлежащую плоскости β, так, чтобы прямые AC и BD оказались параллельными.

7. Треугольник ABC — прямоугольный и равнобедренный с прямым углом C и гипотенузой 6 см. Отрезок AM перпендикулярен плоскости треугольника, $\angle MCA = 60°$. Найдите длину отрезка MB.

Вариант 45

6. На рисунке 78 изображены пересекающиеся плоскости α и β. Точки A и B принадлежат плоскости α, а точка C лежит в плоскости β. Скопируйте рисунок и изобразите на нем точку D, принадлежащую плоскости β, так, чтобы прямые AC и BD оказались параллельными.

7. Через концы отрезка AB, не пересекающего плоскость α, проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 и B_1; $AA_1 = 5$ см, $B_1B = 8$ см. Найдите длину отрезка, соединяющего середины отрезков AB и A_1B_1.

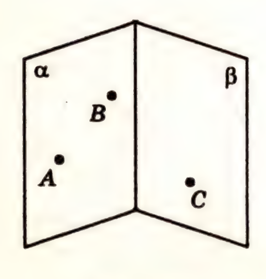


Рис. 77

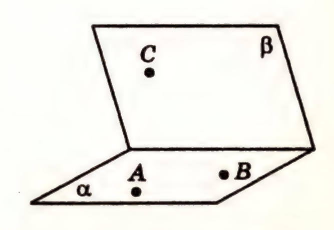


Рис. 78

Вариант 46

6. На рисунке 79 изображены пересекающиеся плоскости α и β. Точки A и B принадлежат плоскости α, а точка C лежит в плоскости β. Скопируйте рисунок и изобразите на нем точку D, принадлежащую плоскости β, так, чтобы отрезки AD и BC оказались пересекающимися.

7. Из точки O пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ к его плоскости восставлен перпендикуляр OM так, что $\angle OBM = 60°$. Найдите косинус угла ABM.

Вариант 47

6. На рисунке 80 изображены пересекающиеся плоскости α и β. Точки A и B принадлежат плоскости α, а точка C лежит в плоскости β. Скопируйте рисунок и изобразите на нем точку D, принадлежащую плоскости β, так, чтобы отрезки AC и BD оказались пересекающимися.

7. Диагональ квадрата равна 6 см. Точка, равноудаленная от всех сторон квадрата, находится на расстоянии 5 см от точки пересечения его диагоналей. Найдите расстояние от этой точки до стороны квадрата.

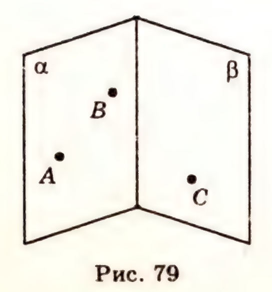


Рис. 79

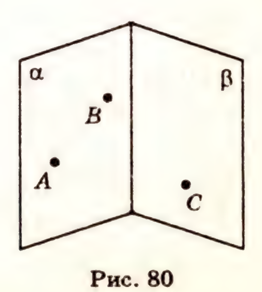


Рис. 80

Вариант 48

6. Туго натянутая нить последовательно закреплена в точках 1, 2, 3, 4 и 5, расположенных на параллельных стержнях a, b и c, не принадлежащих одной и той же плоскости (рис. 81). Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых нити соприкасаются.

7. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6 см и 10 см вокруг большей стороны.

Вариант 49

6. На рисунке 82 изображены параллельные плоскости α и β. Точка A принадлежит плоскости α, точки C и D лежат в плоскости β, а точка M принадлежит прямой AC. Скопируйте рисунок и изобразите на нем точку B, принадлежащую плоскости α, так, чтобы прямые AC и BD пересекались в точке M.

7. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Высота пирамиды, равная 12 см, делит гипотенузу этого треугольника пополам. Найдите боковые ребра пирамиды.

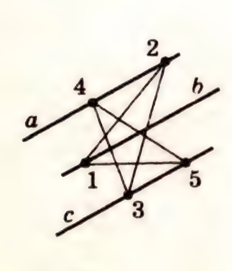


Рис. 81

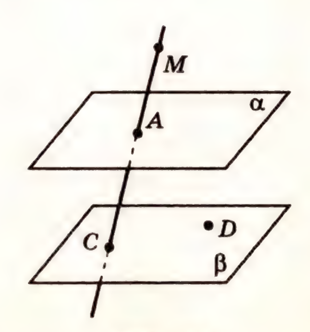


Рис. 82

7 – 5527

Вариант 50

6. На рисунке 83 изображены параллельные плоскости α и β. Точки A и B принадлежат плоскости α, а точка C лежит в плоскости β. Скопируйте рисунок и изобразите на нем точку D, принадлежащую плоскости β, так, чтобы прямые AC и BD оказались параллельными.

7. Через концы отрезка AB, имеющего с плоскостью α общую точку, проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 и B_1; $AA_1 = 5$ см. Длина отрезка, соединяющего середины отрезков AB и A_1B_1, равна 8 см. Найдите длину отрезка B_1B.

Вариант 51

6. На рисунке 84 изображены параллельные плоскости α и β. Точки A и B принадлежат плоскости α, точка C лежит в плоскости β, а точка M принадлежит прямой BC. Скопируйте рисунок и изобразите на нем точку D, принадлежащую плоскости β, так, чтобы прямые AD и BC пересекались в точке M.

7. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 см и острым углом 30° вокруг меньшего катета.

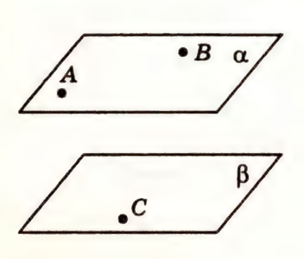


Рис. 83

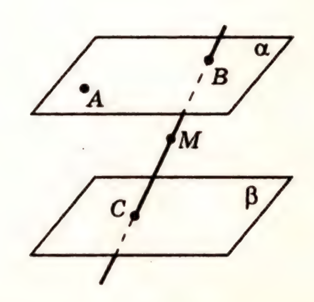


Рис. 84

Вариант 52

6. Точки *A* и *B* лежат соответственно на нижнем и верхнем основаниях цилиндра, изображенного на рисунке (рис. 85). Скопируйте рисунок и проведите отрезок *AB*. Определите, все ли точки отрезка *AB* лежат на поверхности цилиндра.

7. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 10 см, а сторона основания 12 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант 53

6. Точки *A* и *B* расположены на видимой части боковой поверхности цилиндра (рис. 86). Скопируйте рисунок и проведите отрезок *AB*. Все ли точки отрезка *AB* принадлежат боковой поверхности цилиндра?

7. Основание пирамиды — ромб с диагоналями 30 см и 40 см. Вершины пирамиды удалены от сторон основания на 13 см. Найдите высоту пирамиды.

Вариант 54

6. Точки *A* и *B* принадлежат боковой поверхности конуса (рис. 87). Скопируйте рисунок и проведите отрезок *AB*. Определите, все ли точки отрезка *AB* лежат на поверхности конуса.

7. В прямоугольнике *ABCD* $AB = 2$ см, $AD = 5$ см. Отрезок *AM* перпендикулярен плоскости прямоугольника, $\angle ABM = 30°$. Найдите объем многогранника *MABD*.

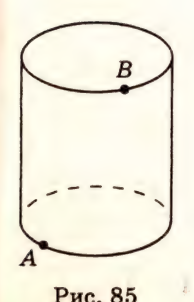


Рис. 85

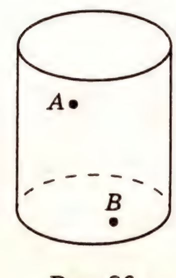


Рис. 86

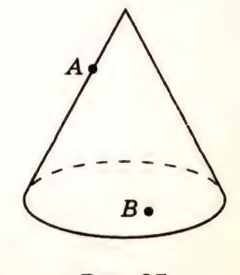


Рис. 87

Вариант 55

6. На рисунке 88 изображены отрезки *AB* и *CD*, лежащие соответственно в плоскостях α и β. Прямые *AD* и *BC* пересекаются. Определите, каково взаимное расположение плоскостей α и β.

7. Площадь полной поверхности куба равна 24 см^2. Найдите его диагональ.

Вариант 56

6. На рисунке 89 изображены отрезки *AB* и *CD*, лежащие соответственно в плоскостях α и β. Прямые *AD* и *BC* пересекаются. Определите, каково взаимное расположение плоскостей α и β.

7. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна 136 см^2, стороны основания 4 см и 6 см. Вычислите объем прямоугольного параллелепипеда.

Вариант 57

6. На рисунке 90 изображены отрезки *AB* и *CD*, лежащие соответственно в плоскостях α и β. Прямые *AC* и *BD* параллельны. Скопируйте рисунок и определите, каково взаимное расположение плоскостей α и β.

7. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 3 см и 5 см, бóльшая из диагоналей его боковых граней образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

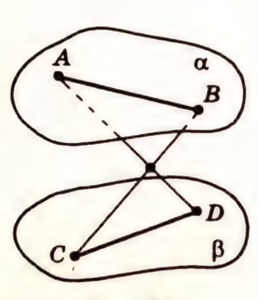


Рис. 88

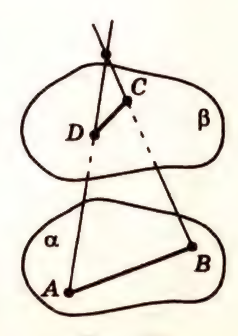


Рис. 89

Вариант 58

6. Точки K, L, M и N принадлежат соответствующим ребрам куба, изображенного на рисунке 91. Определите, пересекаются ли прямые KL и MN, отрезки KN и LM.

7. Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $6\sqrt{2}$ см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Вариант 59

6. Сечение правильной треугольной призмы $ABCA'B'C'$ проходит через ребро AB и точку пересечения медиан основания $A'B'C'$. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.

7. Отрезок, соединяющий конец диаметра нижнего основания цилиндра с центром его верхнего основания, равен 2 см и наклонен к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Вариант 60

6. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение через середины двух смежных сторон основания и середину несмежного с ними бокового ребра. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны многоугольника.

7. Радиус основания конуса равен 5 см, а образующая конуса равна 13 см. Найдите объем конуса.

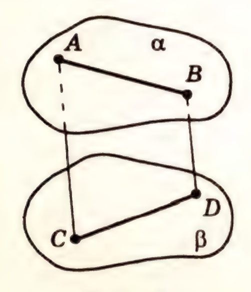


Рис. 90

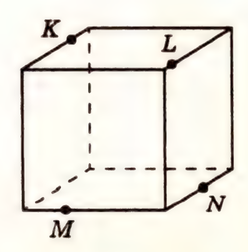


Рис. 91

Вариант 61

6. Точки K и L — вершины куба, изображенного на рисунке 92, точки M и N — середины его ребер. Определите, пересекаются ли прямые KL и MN, отрезки KN и LM.

7. Отрезок AB пересекает плоскость α в точке C, которая делит его в отношении 3 : 5, считая от точки A. Через концы отрезка AB проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 и B_1. Длина отрезка A_1C равна 12 см. Найдите длину отрезка A_1B_1.

Вариант 62

6. Точки K, L, M и N принадлежат ребрам изображенной на рисунке 93 пирамиды. Скопируйте рисунок и определите, пересекаются ли отрезки KN и LM.

7. Образующая конуса равна 5 см, площадь его боковой поверхности равна 15π см^2. Найдите объем конуса.

Вариант 63

6. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ проведено сечение через середины ребер AB, AD и BB'. Каким многоугольником является сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.

7. Высота цилиндра равна 6 см, а площадь его боковой поверхности вдвое меньше площади его полной поверхности. Найдите объем цилиндра.

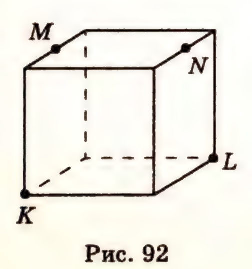


Рис. 92

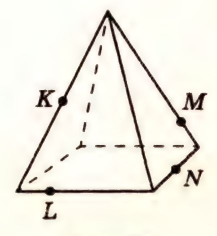


Рис. 93

Вариант 64

6. Через середины двух сторон AB и AC основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ и точку пересечения медиан грани SBC проведено сечение. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.

7. Сторона квадрата $ABCD$ равна 1 см. Отрезок AM перпендикулярен плоскости квадрата, $\angle ABM = 30°$. Найдите расстояние от точки M до прямой BD.

Вариант 65

6. Точки K, L, M и N принадлежат ребрам изображенной на рисунке 94 пирамиды. Определите, пересекаются ли прямые KL и MN, отрезки KN и LM.

7. Найдите площадь сечения шара радиуса 41 см плоскостью, проведенной на расстоянии 29 см от центра шара.

Вариант 66

6. Точка M — середина ребра AD куба, изображенного на рисунке 95. Скопируйте рисунок и изобразите точку N, принадлежащую ребру CD, так, чтобы отрезки $A'N$ и $C'M$ имели общую точку.

7. Квадрат со стороной 3 см вращается вокруг своей диагонали. Найдите площадь поверхности тела вращения.

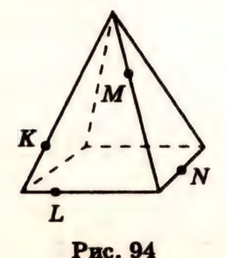


Рис. 94

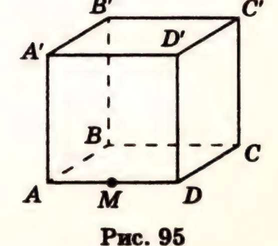


Рис. 95

Вариант 67

6. Вершинами многогранника являются середины боковых ребер и центр основания правильной пирамиды. Как называется этот многогранник? Сделайте рисунок и отметьте равные ребра этого многогранника.

7. Круговой сектор с радиусом 10 см свернут в виде боковой поверхности конуса. Высота конуса равна 8 см. Найдите центральный угол кругового сектора.

Вариант 68

6. Точки K, L и M расположены на ребрах куба $ABCDA'B'C'D'$, изображенного на рисунке 96. Скопируйте рисунок и изобразите точку N, принадлежащую ребру CD, так, чтобы отрезки KN и LM имели общую точку.

7. Квадрат со стороной 3 см вращается вокруг своей диагонали. Найдите объем тела вращения.

Вариант 69

6. Точки K, L и M принадлежат ребрам изображенной на рисунке 97 пирамиды $SABCD$. Скопируйте рисунок и отметьте точку N на ребре CD так, чтобы отрезки KN и LM имели общую точку.

7. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6 см и 8 см вокруг прямой, которая проходит через середины его меньших сторон.

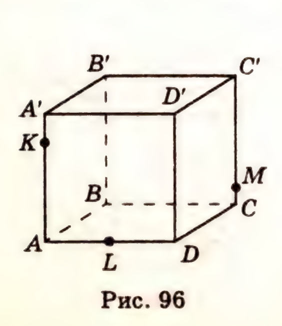


Рис. 96

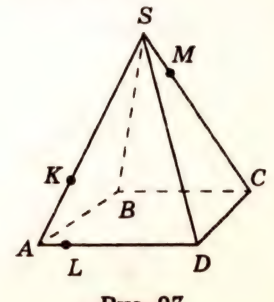


Рис. 97

Вариант 70

6. Точки K, L и N принадлежат ребрам изображенной на рисунке 98 пирамиды $SABC$. Скопируйте рисунок и отметьте точку M на ребре SC так, чтобы отрезки KN и LM имели общую точку.

7. Найдите объем тела, которое получено при вращении квадрата со стороной 7 см вокруг прямой, соединяющей середины противоположных сторон.

Вариант 71

6. Точки K, L и M лежат на ребрах куба $ABCDA'B'C'D'$, изображенного на рисунке 99. Скопируйте рисунок и отметьте точку N на ребре $C'D'$ так, чтобы отрезки KN и LM пересеклись.

7. Высота конуса равна 8 см, объем 24π см^3. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Вариант 72

6. Вершины некоторого многогранника являются центрами пяти граней куба. Как называется этот многогранник? Сделайте рисунок и отметьте равные ребра этого многогранника.

7. Три одинаковых металлических куба с ребрами по 4 см сплавлены в один куб. Определите площадь поверхности этого куба.

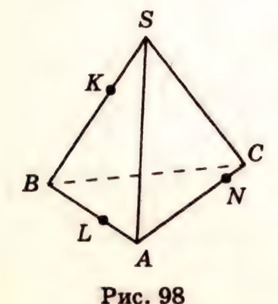


Рис. 98

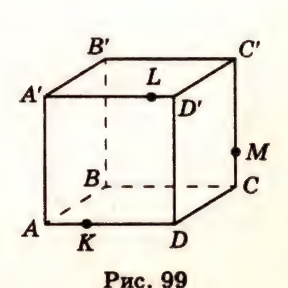


Рис. 99

Вариант 73

6. Точки K, L и M принадлежат ребрам изображенной на рисунке 100 пирамиды $SABCD$. Скопируйте рисунок и отметьте точку N на ребре SC так, чтобы отрезки KN и LM пересеклись.

7. Образующая конуса составляет с плоскостью его основания угол в 30°, а радиус основания конуса равен 6 см. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Вариант 74

6. Точки K, L, M и N лежат на ребрах куба (рис. 101). Скопируйте рисунок и определите, существует ли точка пересечения отрезков KN и ML.

7. Прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 17 см, а один из катетов равен 8 см, вращается вокруг своего большего катета. Найдите площадь поверхности тела вращения.

Вариант 75

6. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение через диагональ основания параллельно непересекающемуся с ней боковому ребру. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.

7. Высота конуса равна 12 см, а его образующая равна 13 см. Найдите площадь полной поверхности конуса.

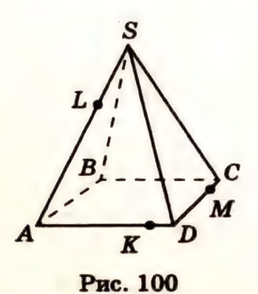


Рис. 100

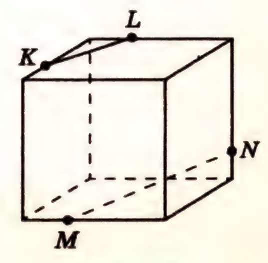


Рис. 101

Вариант 76

6. Точки K и N лежат на ребрах изображенной на рисунке 102 пирамиды, а точки L и M принадлежат соответственно ее граням CSD и ASD. Скопируйте рисунок, изобразите отрезки KL и MN и определите, имеют ли они общую точку.

7. Два металлических куба с ребрами 1 см и 2 см соответственно сплавлены в один куб. Определите ребро этого куба.

Вариант 77

6. Точки K, L, M и N лежат на ребрах изображенной на рисунке 103 пирамиды. Скопируйте рисунок и определите, каково взаимное расположение прямых KL и MN.

7. Два металлических куба с ребрами 1 см и 2 см сплавлены в один куб. Определите полную поверхность этого куба.

Вариант 78

6. Правильная треугольная пирамида рассечена на два многогранника плоскостью, проходящей через сторону основания и середину высоты пирамиды. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.

7. Высота конуса равна 5 см, а угол при вершине осевого сечения равен 120°. Найдите объем конуса.

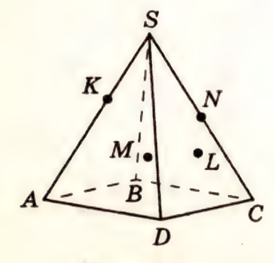


Рис. 102

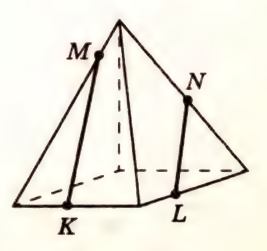


Рис. 103

Вариант 79

6. Точки K, L, M и N лежат на ребрах изображенной на рисунке 104 призмы. Скопируйте рисунок и определите, имеют ли отрезки KN и ML общую точку.

7. К плоскости равнобедренного треугольника ABC с основанием $BC = 6$ см и углом 120° при вершине проведен перпендикуляр AM. Расстояние от точки M до BC равно 12 см. Найдите косинус линейного угла двугранного угла, образованного плоскостями треугольников ABC и MBC.

Вариант 80

6. Точки K, L и M лежат на ребрах изображенной на рисунке 105 призмы. Скопируйте рисунок и отметьте на ребре AC точку N так, чтобы отрезки KN и LM имели общую точку.

7. Найдите объем тела, полученного при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом 6 см вокруг его оси симметрии.

Вариант 81

6. Точка A принадлежит основанию конуса, изображенного на рисунке 106, а точка B — оси SO этого конуса. Скопируйте рисунок и отметьте точку C, в которой прямая AB пересекает боковую поверхность конуса.

7. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 24 см^3, площадь основания 12 см^2. Одна сторона основания в три раза больше другой. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.

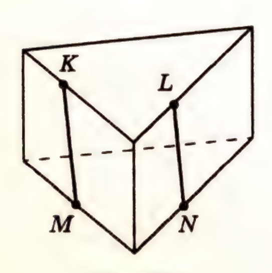


Рис. 104

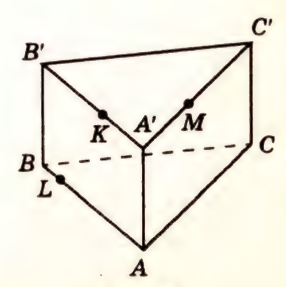


Рис. 105

Вариант 82

6. Правильная четырехугольная пирамида рассечена на два многогранника плоскостью, проходящей через сторону основания и медиану боковой грани. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.

7. Площадь осевого сечения цилиндра равна 64 $см^2$, а его образующая равна диаметру основания. Найдите объем цилиндра.

Вариант 83

6. Точка A принадлежит основанию конуса, изображенного на рисунке 107, а точка B — оси SO этого конуса. Скопируйте рисунок и определите, где, внутри или снаружи конуса, расположена точка C прямой AB.

7. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна 136 $см^2$, стороны основания 4 см и 6 см. Вычислите диагональ прямоугольного параллелепипеда.

Вариант 84

6. На какие многогранники разбивает прямую призму $ABCA'B'C'$ плоскость, проходящая через вершины A, B и C'? Сделайте рисунок.

7. Шар с центром в точке O касается плоскости в точке A. Точка B лежит в плоскости касания. Найдите объем шара, если $AB = 21$ см, $BO = 29$ см.

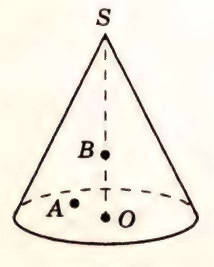


Рис. 106

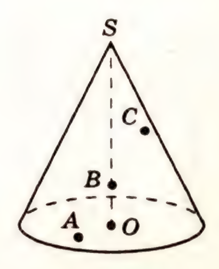


Рис. 107

Вариант 85

6. Точка A принадлежит основанию цилиндра, изображенного на рисунке 108, а точка B — оси OO' этого цилиндра. Скопируйте рисунок и отметьте точку C, в которой прямая AB пересекает боковую поверхность цилиндра.

7. Полукруг свернут в виде боковой поверхности конуса. Радиус основания конуса равен 5 см. Найдите объем конуса.

Вариант 86

6. Точка A принадлежит основанию цилиндра, изображенного на рисунке 109, а точка B — оси OO' этого цилиндра. Скопируйте рисунок и определите, где, внутри или снаружи цилиндра, расположена точка C прямой AB.

7. Диагональ квадрата $ABCD$ равна 10 см. Отрезок AM перпендикулярен плоскости квадрата, $\angle ABM = 60°$. Найдите расстояние от точки M до прямой BD.

Вариант 87

6. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ проведено сечение через середины ребер AB и AD и вершину C'. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.

7. Найдите площадь боковой поверхности тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетами 4 см и 7 см, вокруг большего катета.

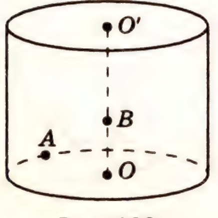


Рис. 108

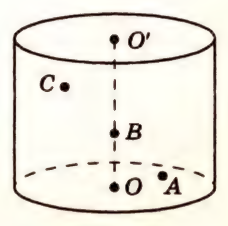


Рис. 109

Вариант 88

6. Точки A, B, C и D лежат на ребрах изображенного на рисунке 110 куба. Скопируйте рисунок и определите, пересекаются ли отрезки AC и BD.

7. Ромб со стороной 5 см и углом 60° вращается вокруг своей меньшей диагонали. Определите объем тела вращения.

Вариант 89

6. В основании пирамиды $SABCD$, изображенной на рисунке 111, лежит прямоугольник. Точка M принадлежит ребру SB. Скопируйте рисунок и отметьте на ребре SC точку N так, чтобы отрезки AN и DM пересекались.

7. Площадь сечения шара плоскостью, проходящей через его центр, равна 4π см^2. Найдите объем шара.

Вариант 90

6. Сечение правильной треугольной призмы $ABCA'B'C'$ проходит через ребро AB и точку пересечения диагоналей грани $ACC'A'$. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.

7. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 8 см и наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 30°. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

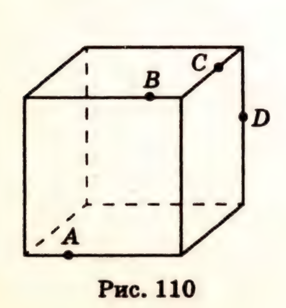


Рис. 110

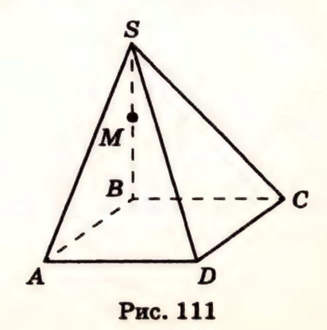


Рис. 111

Вариант 91

6. В основании пирамиды *SABCD*, изображенной на рисунке 112, лежит прямоугольник. Точка *L* принадлежит ребру *SB*, а точка *K* — ребру *SC*. Скопируйте рисунок и отметьте на ребре *CD* точку *M* так, чтобы отрезки *AK* и *LM* пересекались.

7. Образующая конуса равна 4 см, а угол при вершине осевого сечения равен 90°. Найдите объем конуса.

Вариант 92

6. Точка *A* принадлежит основанию цилиндра, изображенного на рисунке 113, а точка *B* — оси *OO'* этого цилиндра. Скопируйте рисунок и определите, где, внутри или снаружи цилиндра, расположена точка *C* прямой *AB*.

7. Катеты *CA* и *CB* прямоугольного треугольника *ABC* равны 6 см и 8 см. Через вершину прямого угла *C* проходит плоскость, параллельная *AB*. Меньший катет треугольника образует с этой плоскостью угол в 45°. Найдите синус угла, который образует с ней другой его катет.

Вариант 93

6. Точки *K*, *L* и *M* — центры трех видимых граней куба, изображенного на рисунке 114. Скопируйте рисунок и определите, пересекаются ли отрезки *DL* и *KM*.

7. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда, в основании которого прямоугольник со сторонами 9 см и 6 см, равна 408 $см^2$. Найдите диагонали параллелепипеда.

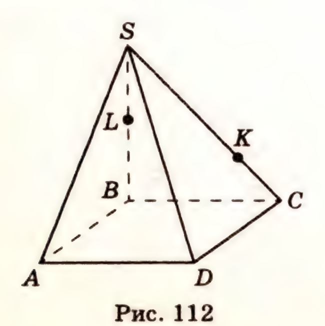


Рис. 112

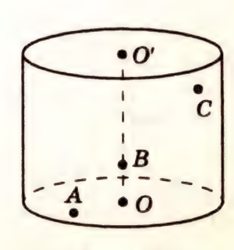


Рис. 113

Вариант 94

6. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение через середины двух смежных сторон основания и середину высоты пирамиды. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны этого многоугольника.

7. Радиус основания цилиндра равен 8 см, площадь боковой поверхности вдвое меньше площади основания. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Вариант 95

6. Точки A, B и C лежат на видимой части боковой поверхности конуса, изображенного на рисунке 115. Один из отрезков с концами в этих точках полностью принадлежит поверхности конуса. Сделайте рисунок и проведите этот отрезок.

7. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

Вариант 96

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ проведено сечение через середины ребер AB и BC параллельно ребру SC. Каким многоугольником является это сечение? Сделайте рисунок и отметьте равные стороны многоугольника.

7. Радиус основания цилиндра равен 4 см, высота в два раза больше длины окружности основания. Найдите объем цилиндра.

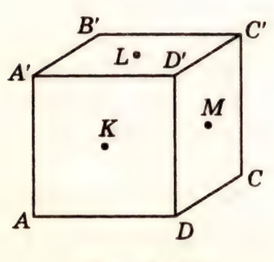


Рис. 114

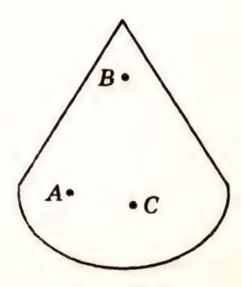


Рис. 115

3 Задание 8 для экзамена «Математика»

3.1. Диагональ меньшей боковой грани прямоугольного параллелепипеда равна большему ребру основания. Высота параллелепипеда равна 2 см, диагональ основания равна 14 см. Найдите объем параллелепипеда.

3.2. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 см и катетом 6 см. Больший катет треугольника в основании призмы равен диагонали меньшей из боковых граней. Найдите высоту призмы.

3.3. Основанием прямой призмы является ромб со стороной 12 см и углом 60°. Меньшее из диагональных сечений призмы является квадратом. Найдите объем призмы.

3.4. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция с острым углом 60°; боковая сторона и меньшая из параллельных сторон трапеции равны 4 см; диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол 30°. Вычислите объем призмы.

3.5. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 45°, а диагональ боковой грани — угол 60°. Высота прямоугольного параллелепипеда равна 8 см. Найдите его объем.

3.6. В основании прямой призмы — ромб; диагонали призмы составляют с плоскостью основания углы 30° и 60°; высота призмы равна 6 см. Найдите объем призмы.

3.7. В основании прямой призмы лежит ромб со стороной 10 см. Сторона основания удалена от двух параллельных ей сторон противолежащей боковой грани соответственно на 5 см и 13 см. Найдите объем призмы.

3.8. Ребро нижнего основания правильной четырехугольной призмы удалено от плоскости верхнего основания на 10 см. Расстояния между противолежащими боковыми ребрами равны 8 см. Найдите объем призмы.

3.9. В основании прямой призмы лежит трапеция. Площади параллельных боковых граней призмы равны 8 $см^2$ и 12 $см^2$, а расстояние между ними равно 5 см. Найдите объем призмы.

3.10. В основании прямой призмы лежит трапеция. Объем призмы равен 40 $см^3$. Площади параллельных боковых граней равны 6 $см^2$ и 14 $см^2$. Найдите расстояние между ними.

3.11. Диагональ основания прямоугольного параллелепипеда равна 10 см, а диагонали боковых граней $2\sqrt{10}$ см и $2\sqrt{17}$ см. Найдите объем параллелепипеда.

3.12. В основании прямой призмы лежит ромб. Площадь основания призмы равна 48 $см^2$, а площади ее диагональных сечений равны 30 $см^2$ и 40 $см^2$. Найдите объем призмы.

3.13. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 3 см, площадь боковой поверхности равна 80 $см^2$. Найдите объем пирамиды.

3.14. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, площадь боковой поверхности в два раза больше площади основания. Найдите объем пирамиды.

3.15. Площадь боковой поверхности конуса равна 60π $см^2$; расстояние от центра основания до образующей равно 4,8 см. Найдите объем конуса.

3.16. Основание наклонной призмы — квадрат со стороной 6 см; одно из диагональных сечений призмы перпендикулярно плоскости основания и является ромбом с углом 60°. Найдите объем призмы.

3.17. В основании наклонного параллелепипеда — квадрат со стороной 3 см. Две противолежащие боковые грани перпендикулярны основанию, две другие образуют с плоскостью основания углы 30°. Полная поверхность параллелепипеда 72 $см^2$. Найдите объем параллелепипеда.

3.18. В основании наклонного параллелепипеда — ромб со стороной 4 см и острым углом 45°; боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60°; диагональ одной боковой грани перпендикулярна плоскости основания. Найдите объем параллелепипеда.

3.19. Все 9 ребер наклонной призмы равны 4 см. Объем призмы равен 24 $см^3$. Найдите угол наклона бокового ребра призмы к плоскости основания.

8*

3.20. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 5 см, 12 см и 13 см. Площадь меньшей боковой грани равна 22 $см^2$. Найдите объем призмы.

3.21. В основании наклонной призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 4 см и 6 см. Боковое ребро призмы составляет с плоскостью основания угол 60°. Объем призмы равен 60 $см^3$. Найдите длину бокового ребра призмы.

3.22. Две боковые грани наклонной треугольной призмы образуют угол 60°; расстояние от их общего ребра до двух других ребер равно 5 см; боковое ребро призмы равно 8 см. Найдите боковую поверхность призмы.

3.23. Две боковые грани наклонной треугольной призмы перпендикулярны. Сумма их площадей равна 70 $см^2$. Длина бокового ребра равна 5 см. Объем призмы равен 120 $см^3$. Найдите расстояния между боковыми ребрами призмы.

3.24. В правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания.

3.25. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45°. Сторона основания пирамиды равна 6 см. Найдите объем пирамиды.

3.26. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60°. Высота пирамиды равна 3 см. Найдите площадь поверхности пирамиды.

3.27. В правильной четырехугольной пирамиде апофема образует с плоскостью основания угол 60°. Высота пирамиды равна 6 см. Найдите площадь поверхности пирамиды.

3.28. В правильной четырехугольной пирамиде апофема образует с плоскостью основания угол 30°. Сторона основания пирамиды равна 12 см. Найдите площадь поверхности пирамиды.

3.29. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 6 см и образует с боковой гранью угол 30°. Найдите объем пирамиды.

3.30. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 10 см и образует с боковым ребром угол 45°. Найдите объем пирамиды.

3.31. Высота правильной треугольной пирамиды равна 8 см, а боковое ребро — 10 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3.32. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 20 см, а боковое ребро — 16 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3.33. Высота правильной шестиугольной пирамиды равна 12 см, а боковое ребро — 13 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3.34. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 8 см; двугранный угол при основании пирамиды равен 60°. Найдите объем пирамиды.

3.35. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 8 см; двугранный угол при основании пирамиды равен 30°. Найдите объем пирамиды.

3.36. В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна 16 см; двугранный угол при основании пирамиды равен 45°. Найдите объем пирамиды.

3.37. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 5 см; диагональное сечение равновелико основанию. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3.38. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 10 см; диагональное сечение равновелико основанию. Найдите боковую поверхность пирамиды.

3.39. Радиус цилиндра равен 8 см, а его высота равна 12 см. Через середину оси цилиндра проведена прямая, пересекающая плоскость нижнего основания цилиндра на расстоянии 24 см от центра нижнего основания. В каких отношениях эта прямая делит пересекающиеся с ней образующие цилиндра?

3.40. Радиус цилиндра равен 6 см, а его высота равна 10 см. Через середину образующей цилиндра проведена прямая, пересекающая ось цилиндра. Эта прямая пересекает нижнее основание цилиндра на расстоянии 3 см от центра нижнего основания. В каком отношении эта прямая делит ось цилиндра?

3.41. Радиус цилиндра равен 8 см. Через середину оси цилиндра проведена прямая, пересекающая плоскость, содержащую нижнее основание цилиндра, на расстоянии 12 см от центра нижнего основания. Эта прямая пересекает образующую цилиндра на расстоянии 2 см от плоскости нижнего основания. Найдите высоту цилиндра.

3.42. Высота цилиндра равна 12 см. Через середину образующей цилиндра проведена прямая, пересекающая ось цилиндра на расстоянии 4 см от нижнего основания. Эта прямая пересекает плоскость, содержащую нижнее основание цилиндра, на расстоянии 18 см от центра нижнего основания. Найдите радиус основания цилиндра.

3.43. Высота конуса равна 20 см, расстояние от центра основания до образующей равно 12 см. Найдите объем конуса.

3.44. Радиус основания конуса равен 20 см; расстояние от центра основания до образующей равно 12 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

3.45. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 15 см, а один из катетов — 9 см. Найдите площадь сечения, проведенного через середину высоты пирамиды параллельно ее основанию.

3.46. На расстоянии 4 см от вершины пирамиды проведено сечение, параллельное основанию. Площадь сечения равна 10 $см^2$ и составляет $\frac{1}{4}$ от площади основания пирамиды. Найдите объем пирамиды.

3.47. Радиус основания конуса 6 см, а высота равна 12 см. В конусе проведено сечение параллельно основанию. Радиус сечения равен 4 см. В каком отношении сечение делит высоту конуса?

3.48. Высота конуса равна 12 см, а радиус основания равен 3 см. На каком расстоянии от вершины конуса надо провести сечение, параллельное основанию, чтобы его площадь была равна π $см^2$?

3.49. В прямом параллелепипеде проведено сечение через диагональ нижнего основания и середину несоприкасающегося с этой диагональю бокового ребра. Расстояние от плоскости сечения до вершины нижнего основания, не лежащей в плоскости сечения, равно 5 см. Площадь сечения равна 10 $см^2$. Найдите объем параллелепипеда.

3.50. В правильной четырехугольной призме проведено сечение через диагональ нижнего основания и конец непараллельной ей диагонали верхнего основания. Площадь основания призмы и площадь сечения равны 20 $см^2$. Найдите объем призмы.

3.51. В правильной треугольной призме проведено сечение через сторону нижнего основания и середину противолежащего бокового ребра. Плоскость сечения наклонена к плоскости основания под углом 45°; площадь сечения равна $4\sqrt{6}$ см^2. Найдите объем призмы.

3.52. Высота правильной треугольной призмы равна 12 см. В призме проведено сечение через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания. Плоскость сечения наклонена к плоскости основания призмы под углом 60°. Найдите объем призмы.

3.53. В прямом параллелепипеде проведено сечение через диагональ нижнего основания и середину непересекающегося с этой диагональю бокового ребра. Объем меньшего из двух многогранников, на которые параллелепипед делится плоскостью сечения, равен 40 см^3. Найдите объем параллелепипеда.

3.54. В треугольной призме проведено сечение через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания. В каком отношении плоскость сечения делит объем призмы?

3.55. В треугольной пирамиде проведено сечение через среднюю линию нижнего основания и вершину пирамиды. В каком отношении плоскость сечения делит объем пирамиды?

3.56. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение через середины двух смежных сторон основания перпендикулярно основанию. В каком отношении плоскость сечения делит объем пирамиды?

3.57. В прямоугольном параллелепипеде проведено сечение через ребро нижнего основания и точку пересечения диагоналей противолежащей боковой грани. В каком отношении плоскость сечения делит объем параллелепипеда?

3.58. В пирамиде проведено сечение параллельно основанию. Плоскость сечения делит пирамиду на части, объемы которых относятся как 1 : 26, считая от вершины. В каком отношении плоскость сечения делит высоту пирамиды?

3.59. В пирамиде проведено сечение параллельно основанию. Плоскость сечения делит высоту пирамиды на части, отношение которых равно 2 : 1, считая от вершины. В каком отношении плоскость сечения делит объем пирамиды?

3.60. Площадь основания пирамиды равна $1 м^2$. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее на две равновеликие части. Найдите площадь сечения пирамиды.

3.61. Развертка боковой поверхности правильной треугольной призмы есть прямоугольник со сторонами 15 см и 12 см. Определите объем этой призмы. Найдите оба решения.

3.62. Развертка боковой поверхности правильной треугольной призмы есть прямоугольник со сторонами 18 см и 9 см. Определите площадь полной поверхности этой призмы. Найдите оба решения.

3.63. Прямоугольник со сторонами 12 см и 16 см может быть двумя способами свернут в виде боковой поверхности правильной четырехугольной призмы. Сравните объемы этих призм.

3.64. Прямоугольник со сторонами 24 см и 10 см может быть двумя способами свернут в виде боковой поверхности правильной четырехугольной призмы. Сравните площади полных поверхностей этих призм.

3.65. Прямоугольник со сторонами 12 см и 8 см в первый раз свернут в виде боковой поверхности правильной четырехугольной призмы высотой 8 см, а во второй — правильной треугольной призмы с такой же высотой. Сравните объемы этих призм.

3.66. Прямоугольник со сторонами 24 см и 10 см в первый раз свернут в виде боковой поверхности правильной четырехугольной призмы высотой 10 см, а во второй — правильной треугольной призмы с такой же высотой. Сравните площади полных поверхностей этих призм.

3.67. Квадрат со стороной 12 см в первый раз свернут в виде боковой поверхности правильной треугольной призмы, а во второй — правильной четырехугольной призмы. Сравните площади полных поверхностей этих призм.

3.68. Квадрат со стороной 24 см в первый раз свернут в виде боковой поверхности правильной треугольной призмы, а во второй — правильной четырехугольной призмы. Сравните объемы этих призм.

3.69. Ромб со стороной 10 см и острым углом $60°$ вращается около стороны. Найдите объем тела вращения.

3.70. Ромб со стороной 8 см и острым углом $60°$ вращается около стороны. Найдите площадь поверхности тела вращения.

3.71. Прямоугольная трапеция с основаниями 5 см и 8 см и высотой 4 см вращается около большего основания. Найдите объем тела вращения.

3.72. Прямоугольная трапеция с основаниями 6 см и 10 см и высотой 3 см вращается около большего основания. Найдите площадь поверхности тела вращения.

3.73. Прямоугольная трапеция с основаниями 10 см и 14 см и высотой 3 см вращается около меньшего основания. Найдите объем тела вращения.

3.74. Прямоугольная трапеция с основаниями 12 см и 15 см и высотой 4 см вращается около меньшего основания. Найдите площадь поверхности тела вращения.

3.75. Прямоугольная трапеция с основаниями 10 см и 15 см и высотой 12 см в первый раз вращается около меньшего из оснований, а во второй — около большего. Сравните объемы тел вращения.

3.76. Прямоугольная трапеция с основаниями 12 см и 20 см и высотой 15 см в первый раз вращается около меньшего из оснований, а во второй — около большего. Сравните площади поверхностей тел вращения.

3.77. Равнобочная трапеция с основаниями 10 см и 16 см и высотой 4 см вращается около меньшего основания. Найдите объем тела вращения.

3.78. Равнобочная трапеция с основаниями 10 см и 18 см и высотой 3 см вращается около меньшего основания. Найдите площадь поверхности тела вращения.

3.79. Равнобочная трапеция с основаниями 12 см и 18 см и высотой 4 см вращается около большего основания. Найдите объем тела вращения.

3.80. Равнобочная трапеция с основаниями 15 см и 25 см и высотой 12 см вращается около большего основания. Найдите площадь поверхности тела вращения.

3.81. Равнобочная трапеция с основаниями 12 см и 24 см и высотой 8 см в первый раз вращается около меньшего основания, а во второй — около большего. Сравните объемы тел вращения.

3.82. Равнобочная трапеция с основаниями 12 см и 28 см и высотой 6 см в первый раз вращается около меньшего основания, а во второй — около большего. Сравните площади поверхностей тел вращения.

3.83. Прямоугольный треугольник с катетом 3 см и гипотенузой 6 см вращается вокруг оси, проходящей через вершину прямого угла параллельно гипотенузе. Найдите объем тела вращения.

3.84. Квадрат со стороной 8 см вращается около прямой, проведенной через вершину параллельно диагонали, не проходящей через эту вершину. Найдите объем тела вращения.

3.85. Правильный треугольник со стороной 4 см вращается около оси, проведенной через вершину параллельно стороне, не проходящей через эту вершину. Найдите объем тела вращения.

3.86. Прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см вращается около прямой, параллельной меньшему из катетов и проходящей через вершину меньшего из углов треугольника. Найдите объем тела вращения.

3.87. Ромб со стороной 13 см и диагональю 10 см вращается около оси, проходящей через вершину тупого угла параллельно диагонали, не проходящей через эту вершину. Найдите объем тела вращения.

3.88. Ромб $ABCD$ со стороной 10 см и диагональю $AC = 12$ см в первый раз вращается около оси, проходящей через вершину A параллельно диагонали BD, а во второй — через вершину B параллельно диагонали AC. Сравните объемы тел вращения.

3.89. Прямоугольная трапеция с основаниями 10 см и 18 см и высотой 6 см вращается около прямой, проходящей через вершину острого угла перпендикулярно основаниям. Найдите объем тела вращения.

3.90. Три металлических кубика с ребром a сплавлены в один шар. Что больше: площадь поверхности этого шара или суммарная площадь поверхностей кубиков?

3.91. Четыре металлических шарика радиуса a сплавлены в один куб. Что больше: площадь поверхности этого куба или суммарная площадь поверхностей шариков?

3.92. Сколько шариков диаметром 2 см можно отлить из металлического куба с ребром 4 см?

3.93. Сколько кубиков с ребром 2 см можно отлить из металлического шара диаметром 4 см?

3.94. В правильную четырехугольную призму вписан цилиндр. Объем цилиндра равен V. Найдите объем призмы.

3.95. В правильную треугольную призму вписан цилиндр. Площадь боковой поверхности призмы равна S. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

3.96. В цилиндр вписана правильная треугольная призма. Площадь боковой поверхности призмы равна S. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

3.97. В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Объем конуса равен V. Найдите объем пирамиды.

3.98. В конус вписана правильная четырехугольная пирамида. Объем пирамиды равен V. Найдите объем конуса.

3.99. В куб вписан шар. Найдите отношение площадей поверхностей куба и шара.

3.100. В шар вписан куб. Найдите отношение объемов шара и куба.



Задания 9, 10 для экзамена «Математика»

Задания 6, 7 для экзамена «Алгебра и начала анализа»

Тригонометрия

Вычислите (№ 4.1 — 4.4):

4.1. $\dfrac{\sin 75° + \sin 45°}{\sin 285°}$.

4.2. $\dfrac{\sin 70° + \sin 20°}{\cos 25°}$.

4.3. $\dfrac{\cos 105° - \cos 15°}{\cos 315°}$.

4.4. $\dfrac{\sin 55° \cos 35° - \cos^2 10°}{\sin 200°}$.

Сравните значения выражений (№ 4.5, 4.6):

4.5. $\dfrac{1 + \cos 40° + \cos 80°}{\sin 80° + \sin 40°}$ и $\dfrac{\cos 105° \cos 5° + \sin 105° \sin 5°}{\sin 95° \cos 5° + \cos 95° \sin 5°}$.

4.6. $\dfrac{\sin 20° - \sin 40°}{1 - \cos 20° + \cos 40°}$ и $\dfrac{\sin 25° \cos 5° - \cos 25° \sin 5°}{\cos 15° \cos 5° - \sin 15° \sin 5°}$.

4.7. Упростите выражение $\cos(2\pi - 3x)\cos x + \sin 3x \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$ и укажите все x, при которых его значение равно $-\dfrac{1}{2}$.

4.8. Упростите выражение $\sin(\pi - 3x)\cos x + \cos 3x \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$ и укажите все x, при которых его значение равно $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4.9. Укажите наименьшее положительное число x, при котором

$$\sin x° = \sin^2 15° - 2 \sin 15° \cos 15° + \cos^2 15°.$$

4.10. Укажите наименьшее положительное число x, при котором $\cos x° = \dfrac{\cos^2 75° - \sin^2 75°}{\sin 270°}$.

4.11. Укажите наименьшее положительное число x, при котором значение выражения $\dfrac{\sin 30° \cos x° + \cos 30° \sin x°}{\cos 180°}$ равно $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4.12. Укажите наименьшее положительное число x, при котором значение выражения $\frac{\cos 45° \cos x° - \sin 45° \sin x°}{\sin 270°}$ равно 0,5.

Решите уравнение (№ 4.13 — 4.30):

4.13. $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0.$

4.14. $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$

4.15. $\cos^2 x + 6 \sin x - 6 = 0.$

4.16. $2 \sin^2 x + 7 \cos x + 2 = 0.$

4.17. $\cos 2x + 8 \sin x = 3.$

4.18. $\cos 2x = 1 + 4 \cos x.$

4.19. $\cos 2x + \sin x = 0.$

4.20. $\cos 2x + \cos x = 0.$

4.21. $5 - 4 \sin^2 x = 4 \cos x.$

4.22. $\cos 2x + 9 \sin x + 4 = 0.$

4.23. $\cos 2x - 7 \cos x + 4 = 0.$

4.24. $2 \cos 2x = 1 + 4 \cos x.$

4.25. $2 \sin^2 x + 5 \cos x = 4.$

4.26. $2 \cos 2x = 8 \sin x + 5.$

4.27. $\sin 2x - \sin x = 2 \cos x - 1.$

4.28. $\sin 2x - \cos x = 2 \sin x - 1.$

4.29. $\sin 2x + 2 \sin x = \cos x + 1.$

4.30. $\sin 2x + 2 \cos x = \sin x + 1.$

4.31. Найдите все решения уравнения $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

4.32. Найдите все решения уравнения $\cos 2x + \sin x = \cos^2 x$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4.33. Найдите все решения уравнения

$$\cos 2x - \cos^2 x - \sqrt{2} \sin x = 0,$$

принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

4.34. Найдите все решения уравнения

$$\cos 2x + \sin^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0,$$

принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

4.35. Найдите все решения уравнения $\sin x = \cos x$, принадлежащие отрезку $[-2\pi; 0]$.

4.36. Найдите все решения уравнения $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

4.37. Найдите все решения уравнения $\sin x + \cos x = 0$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

4.38. Найдите все решения уравнения $\sin x = \sqrt{3} \cos x$, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

4.39. Найдите все решения уравнения $\frac{2\cos x + \sin x}{\cos x - 7\sin x} = -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

4.40. Найдите все решения уравнения $\frac{3\sin x + \cos x}{\cos x + 5\sin x} = \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

4.41. Найдите все решения уравнения $\frac{2\sin x - \cos x}{5\sin x - 4\cos x} = \frac{1}{3}$, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

4.42. Найдите все решения уравнения $\frac{\sin x - 2\cos x}{2\sin x + \cos x} = -\frac{1}{3}$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

Вычислите координаты точек пересечения графиков функций (№ 4.43 — 4.46):

4.43. $y = \sin^2 x$ и $y = \cos^2 x$.

4.44. $y = 3\sin^2 x$ и $y = \cos^2 x$.

4.45. $y = \sin^2 x$ и $y = 3\cos^2 x$.

4.46. $y = \sin 2x$ и $y = 2\cos^2 x$.

Найдите абсциссы общих точек графиков функций (№ 4.47 — 4.50):

4.47. $y = \sin x$ и $y = \sin 2x$.

4.48. $y = 2 + \cos 2x$ и $y = \cos x$.

4.49. $y = 3\sin 2x$ и $y = 4\cos x$.

4.50. $y = 3\cos x - 1$ и $y = \cos 2x$.

Степени и логарифмы

Вычислите (№ 4.51 — 4.58):

4.51. $\log_{216} 27 + \log_{36} 16 + \log_6 3$.

4.52. $\log_{0,2} 125 : \log_{16} 64 \cdot \log_3 81$.

4.53. $\log_{\frac{1}{2}} 16 \cdot \log_5 \frac{1}{25} : 9^{\log_3 2}$.

4.54. $\log_{\frac{1}{3}} 9 \cdot \log_2 \frac{1}{8} : 7^{2\log_{49} 2}$.

4.55. $(3\log_7 2 - \log_7 24) : (\log_7 3 + \log_7 9)$.

4.56. $(3\lg 2 + \lg 0,25) : (\lg 14 - \lg 7)$.

4.57. $(\log_2 12 - \log_2 3 + 3^{\log_3 8})^{\lg 5}$.

4.58 $(\log_6 2 + \log_6 3 + 2^{\log_2 4})^{\log_5 7}$.

Решите уравнение (№ 4.59 — 4.80):

4.59. $2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$.

4.60. $3^{1-x} - 3^x = 2$.

4.61. $\frac{1}{2} \cdot 2^{x-1} + 2^{3-x} = 3.$

4.62. $\frac{1}{27} \cdot 3^{x+2} + 3^{2-x} = 4.$

4.63. $5^x - \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = 4.$

4.64. $8 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{x+1} - 7^{x-1} = 1.$

4.65. $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0.$

4.66. $9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.$

4.67. $9^x - 3^{x+1} = 54.$

4.68. $3^{x-1} + 2 \cdot 3^{-x-1} - 1 = 0.$

4.69. $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot 10^{3x^2-1}.$

4.70. $5^{x^2-15} = 25^x.$

4.71. $0{,}1^{5x-8-x^2} = 100.$

4.72. $3^{x^2-4x} = 243.$

4.73. $4^x - 3 \cdot 2^x = 4.$

4.74. $9^x + 8 \cdot 3^x = 9.$

4.75. $2^{2x+1} + 7 \cdot 2^x = 4.$

4.76. $3^{2x+1} - 8 \cdot 3^x = 3.$

4.77. $9^x - 5 \cdot 3^{x+1} + 54 = 0.$

4.78. $2^{2x+1} - 7 \cdot 2^x + 3 = 0.$

4.79. $4^x + 2^x = 12.$

4.80. $2^{x^2-1} \cdot 5^{x^2-1} = 0{,}001 \cdot (10^{x+2})^3.$

Решите неравенство (№ 4.81 — 4.86):

4.81. $3^{x^2} \leqslant 81.$

4.82. $27^x < 9^{x^2-1}.$

4.83. $10^x - 8 \cdot 5^x \geqslant 0.$

4.84. $3^x - 2 \cdot 6^x > 0.$

4.85. $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 0.$

4.86. $\frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{4}\right)^{3x+2} < 0.$

4.87. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2^x + 2^{3-x} < 9.$

4.88. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $3^x + 3^{2-x} < 10.$

Решите уравнение (№ 4.89 — 4.92):

4.89. $\log_7 (x^2 - 2x - 8) = 1.$

4.90. $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4x - 5) = -4.$

4.91. $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 5x + 6) = -1.$

4.92. $\log_2 (x^2 - 4x + 4) = 4.$

4.93. Укажите все целые решения неравенства

$$\log_4 (x^2 + 2x - 8) < 2.$$

4.94. Укажите все натуральные решения неравенства

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 8) \geqslant -1.$$

Решите неравенство (№ 4.95 — 4.100):

4.95. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 7x + 10) > -2.$

4.96. $\log_2(x^2 - 13x + 30) < 3.$

4.97. $\log_3(x^2 - 2x) > 1.$

4.98. $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + x - 3) < -2.$

4.99. $\log_2(x^2 - x - 2) \geqslant 2.$

4.100. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 11x - 4) \leqslant -5.$

Решите уравнение (№ 4.101 — 4.106):

4.101. $3^{3x} + 3^{2x+1} = 3^x + 3.$

4.102. $5^{4x-1} + 5^{3x+1} = 5^x + 25.$

4.103. $6^x - 3^x = 2^x - 1.$

4.104. $6^{x+1} - 18 \cdot 2^x = 3^{x+1} - 9.$

4.105. Укажите отрицательный корень уравнения

$$2^{3x+1} - 2^{2x} = 2^{x+1} - 1.$$

4.106. Укажите положительный корень уравнения

$$4^{5x} - 4^{2x-1} = 4^{3x+1} - 1.$$

Решите уравнение (№ 4.107 — 4.110):

4.107. $\log_5 \dfrac{1-2x}{x+3} = 1.$

4.108. $\log_4 \dfrac{4+2x}{x-5} = 2.$

4.109. $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{3x+2}{2x-7} = -1.$

4.110. $\log_{\frac{1}{6}} \dfrac{16-20x}{3x+4} = -2.$

Решите уравнение (№ 4.111 — 4.118):

4.111. $\dfrac{6^{x^2}}{3^2} = \dfrac{2^2}{6^{8-5x}}.$

4.112. $\dfrac{14^{x^2+2}}{2^7} = \dfrac{7^7}{14^{4x}}.$

4.113. $\dfrac{10^{x^2}}{2^4} = \dfrac{5^4}{10^{9-6x}}.$

4.114. $\dfrac{15^{x^2-16}}{3^2} = \dfrac{5^2}{15^{8-9x}}.$

4.115. $\dfrac{2^{x^2+2}}{6^2} = \dfrac{6^2}{3^{x^2+2}}.$

4.116. $\dfrac{4^{x^2}}{14^x} = \dfrac{14^{2x}}{7^{2x^2}}.$

4.117. $\dfrac{2^{2x^2-6x}}{12^{3-x}} = \dfrac{12^{1-2x}}{3^{x^2-3x}}.$

4.118. $\dfrac{3^{x^2+3x}}{21^{2x}} = \dfrac{21^{2x}}{7^{x^2+3x}}.$

Решите неравенство (№ 4.119 — 4.134):

4.119. $\dfrac{4^x - 2}{1 - 3x} > 0.$ **4.120.** $\dfrac{2^x - 1}{3x + 2} < 0.$

4.121. $\dfrac{27 - 9^x}{4x - 1} > 0.$ **4.122.** $\dfrac{5 - 25^x}{2x + 5} < 0.$

4.123. $\dfrac{x + 4}{\lg x} \geqslant 0.$ **4.124.** $\dfrac{x + 5}{\log_{\frac{1}{3}} x} > 0.$

4.125. $\dfrac{x - 3}{\log_5 x} \leqslant 0.$ **4.126.** $\dfrac{3x - 1}{\log_{\frac{1}{4}} x} > 0.$

4.127. $\dfrac{3x - 4}{\log_{\frac{1}{2}} x} < 0.$ **4.128.** $\dfrac{2x - 1}{\lg x} > 0.$

4.129. $\dfrac{(0{,}1)^x + 1000}{2x - 3} < 0.$ **4.130.** $\dfrac{4 - (0{,}5)^x}{x - 1} > 0.$

4.131. $\dfrac{\lg x + 1}{4x - 1} < 0.$ **4.132.** $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} x + 2}{2x + 1} > 0.$

4.133. $\dfrac{x - 3}{4^x - 1} \leqslant 0.$ **4.134.** $\dfrac{x - 9}{2^x - 1} \geqslant 0.$

Решите систему уравнений (№ 4.135 — 4.156):

4.135. $\begin{cases} 27^x = 9^y, \\ 81^x = 3^{y+1}. \end{cases}$ **4.136.** $\begin{cases} 16^x = 64^y, \\ 27^{x+1} = 81^{y-1}. \end{cases}$

4.137. $\begin{cases} x - y = 8, \\ 2^{x - 3y} = 16. \end{cases}$ **4.138.** $\begin{cases} x + y = 3, \\ 5^{x + 3y} = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$

4.139. $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ \dfrac{4^{x - 2,5}}{4^{3y}} = 2. \end{cases}$ **4.140.** $\begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ \dfrac{3^{8x}}{3^{3y}} = 9. \end{cases}$

4.141. $\begin{cases} y - x = 7, \\ 3^x \cdot 3^{2(y-1)} = 27. \end{cases}$ **4.142.** $\begin{cases} \dfrac{y}{3} - \dfrac{x}{2} = 1, \\ 2^{x-2} \cdot 2^y = 8. \end{cases}$

4.143. $\begin{cases} 2x + 7y = 1, \\ 2^{x+y} = 4^{x-y+2}. \end{cases}$ **4.144.** $\begin{cases} 2y - x = 6, \\ 9^{2x+y} = 3^{2-3y}. \end{cases}$

9 – 5527

4.145. $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ \dfrac{3^y}{27} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{x-2}. \end{cases}$

4.146. $\begin{cases} x - y = 7, \\ \log_2(2x + y) = 3. \end{cases}$

4.147. $\begin{cases} 3x + 4y = 8, \\ 8 \cdot 2^y = 4^{2x + 2,5} \end{cases}$

4.148. $\begin{cases} 4x + y = -10, \\ \log_3(3y - x) = 2. \end{cases}$

4.149. $\begin{cases} x - y - 7 = 0, \\ \log_3 \dfrac{x+1}{y} = 2. \end{cases}$

4.150. $\begin{cases} x + y - 10 = 0, \\ \log_2 \dfrac{y-1}{x} = 3. \end{cases}$

4.151. $\begin{cases} 3x + y = 3, \\ \log_3(5x + 4y) = \log_3(y + 5). \end{cases}$

4.152. $\begin{cases} y - 2x = 2, \\ \log_5(y - x) = \log_5(x + 2). \end{cases}$

4.153. $\begin{cases} 4x - y = 2, \\ \log_{12} x + \log_{12} 3 = \log_{12}(y + 1). \end{cases}$

4.154. $\begin{cases} x + 4y = 16, \\ \log_7 y - \log_7 4 = \log_7(x + 1). \end{cases}$

4.155. $\begin{cases} 2x + y = 15, \\ x - 3y = \log_2 144 - \log_2 9. \end{cases}$

4.156. $\begin{cases} 2y - 3x = 6, \\ 2x + y = \log_3 135 - \log_3 5. \end{cases}$

Производная и ее приложения

4.157. Найдите значение производной функции $y = \sin\left(4x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{12}$.

4.158. Найдите значение производной функции $y = \ln(2 - x)$ в точке $x_0 = -1$.

4.159. Найдите значение производной функции $y = e^{2x-1}$ в точке $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

4.160. Найдите значение производной функции $y = \sqrt{2x + 5}$ в точке $x_0 = 2$.

4.161. Найдите значение производной функции $y = e^x \sin x + x$ в точке $x_0 = 0$.

4.162. Найдите значение производной функции $y = \frac{x}{x+1}$ в точке $x_0 = -2$.

4.163. Найдите значение производной функции $y = x \ln x$ в точке $x_0 = 1$.

4.164. Найдите значение производной функции $y = \frac{\ln x}{x}$ в точке $x_0 = 1$.

4.165. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x - 3x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

4.166. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 2 - \frac{x}{2} - x^2$ в точке пересечения его с осью ординат.

4.167. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке с абсциссой $x_0 = \pi$.

4.168. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке графика с ординатой 2.

4.169. Выясните, является ли прямая $y = 12x - 10$ касательной к графику функции $y = 4x^3$.

4.170. Выясните, является ли прямая $y = x + 1$ касательной к графику функции $y = e^x$.

4.171. Выясните, является ли прямая $y = x$ касательной к графику функции $y = \sin x$.

4.172. Выясните, является ли прямая $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$.

4.173. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. Найдите координаты всех точек графика этой функции, касательные в которых параллельны найденной касательной.

4.174. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \frac{4}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$. Найдите координаты всех точек графика этой функции, касательные в которых параллельны найденной касательной.

4.175. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 1 + \cos x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Найдите координаты всех точек графика этой функции, касательные в которых параллельны найденной касательной.

4.176. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x + \sin x$ в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{\pi}{2}$. Найдите координаты всех точек графика этой функции, касательные в которых параллельны найденной касательной.

4.177. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x + e^{-2x}$, параллельной прямой $y = -x$.

4.178. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x - \frac{1}{x^2}$, параллельной прямой $y = 3x$.

4.179. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 2x - \ln x$, параллельной прямой $y = x$.

4.180. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 2\sqrt{x} + x$, параллельной прямой $y = 2x$.

4.181. В какой точке касательная к графику функции $y = x^2 - 5x$ параллельна прямой $y = -x$?

4.182. В какой точке касательная к графику функции $y = \sqrt{x}$ параллельна прямой $y = x$?

4.183. В каких точках касательные к графику функции $y = x^3 - 3x + 1$ параллельны оси абсцисс?

4.184. В каких точках касательные к графику функции $y = \frac{1}{x}$ параллельны прямой $y = -x$?

4.185. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = -x^4 + 4x^2 - 3$.

4.186. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = e^x - x$.

4.187. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = \cos x + 2x$.

4.188. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = x + \frac{1}{x}$.

4.189. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = \ln x + \frac{1}{x}$.

4.190. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{2x}{e^x}$.

4.191. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = 2xe^x$.

4.192. Укажите промежутки возрастания и убывания функции $y = 0{,}5x + \sin x$.

4.193. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ на отрезке [4; 5].

4.194. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 3$ на отрезке [2; 3].

4.195. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ на отрезке [−1; 2].

4.196. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 2$ на отрезке [−2; 2].

4.197. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 + 3x^2 + 2$ на отрезке [−2; 1].

4.198. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -x^3 + 3x^2 + 4$ на отрезке [−3; 3].

4.199. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 - 9x^2 - 3$ на отрезке [−1; 4].

4.200. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$ на отрезке [−4; 4].

5 Задание 8 для экзамена «Алгебра и начала анализа»

Тригонометрия

Решите уравнение (№ 5.1 — 5.14):

5.1. $-\sin\frac{x}{2} = \cos x.$

5.2. $\cos\frac{x}{2} + \cos x = 0.$

5.3. $3\cos 2x = 4 - 11\cos x.$

5.4. $\cos^2 6x - \sin^2 3x - 1 = 0.$

5.5. $\sin x = 1 + \frac{1}{x^2+1}.$

5.6. $\cos x = x^2 + 1.$

5.7. $\cos x = 1 + |x|.$

5.8. $\sin x = 1 + 2^x.$

5.9. $2\cos^2 4x - 6\cos^2 2x + 1 = 0.$

5.10. $-2\sin x + 5\sin 2x = 0.$

5.11. $2\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0.$

5.12. $2\sin x + 3\cos 2x - 3 = 0.$

5.13. $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 0.$

5.14. $\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3\cos^2 x.$

Решите систему уравнений (№ 5.15 — 5.18):

5.15. $\begin{cases} y + \sin x = 5, \\ 4y + 2\sin x = 19. \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} 3y + 2\operatorname{tg} x = 4, \\ 2y + 3\operatorname{tg} x = 1. \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} 4y + \sqrt{3}\cos x = -\frac{1}{2}, \\ 28y + 4\sqrt{3}\cos x = 1. \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} 2\sqrt{3}\sin x - 8y = -1, \\ \sqrt{3}\sin x - 7y = \frac{1}{4}. \end{cases}$

Решите неравенство (№ 5.19 — 5.26):

5.19. $\cos x < x^2 + 1.$

5.20. $\cos x \leqslant 1 + |x|.$

5.21. $\cos x \leqslant 1 + 3^x.$

5.22. $\cos x \geqslant x^2 + 1.$

5.23. $\cos x \geqslant 1 + |x|.$

5.24. $\cos x \geqslant 1 + 2^x.$

5.25. $\cos x < 1 + \frac{1}{2 - \sin^2 x}.$

5.26. $\cos x > 1 + \frac{1}{1 + x^4}.$

Иррациональные уравнения

Решите уравнение (№ 5.27 — 5.48):

5.27. $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0.$

5.28. $\sqrt{3x^2 - 4x - 2} = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}.$

5.29. $\sqrt{3x^2 - 2x - 2} = \sqrt{4x^2 - 5x}.$

5.30. $\sqrt{3x^2 - 2x + 1} = \sqrt{2x^2 - 6x + 13}.$

5.31. $\sqrt{2x^2 - 5x + 1} = \sqrt{x^2 - 2x - 1}.$

5.32. $\sqrt{3x^2 - 4x - 1} = \sqrt{2x^2 - 5x - 3}.$

5.33. $\sqrt{x^2 - x + 3} = \sqrt{3x^2 - 5x + 6}.$

5.34. $\sqrt{x^2 - 2x - 4} = \sqrt{2x^2 - 6x - 1}.$

5.35. $3x + 1 = \sqrt{1 - x}.$

5.36. $8 - 3x = \sqrt{x + 2}.$

5.37. $8 - 2x = \sqrt{x + 1}.$

5.38. $x - 2 = \sqrt{2 - x}.$

5.39. $\sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4.$

5.40. $\sqrt{8 - 6x - x^2} - x = 6.$

5.41. $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4.$

5.42. $\sqrt{1 + 4x - x^2} = x - 1.$

5.43. $\sqrt{3x^2 - 4x + 2} = 2x - 3.$

5.44. $\sqrt{4 + 2x - x^2} = x - 2.$

5.45. $2\sqrt{x + 5} = x + 2.$

5.46. $2\sqrt{x^2 + 8} = 2x + 1.$

5.47. $4\sqrt{x + 6} = x + 1.$

5.48. $2\sqrt{5 - x^2} = x - 1.$

Решите систему уравнений (№ 5.49 — 5.52):

5.49. $\begin{cases} \sqrt{x + 3y + 6} = 2, \\ \sqrt{2x - y + 2} = 1. \end{cases}$

5.50. $\begin{cases} \sqrt{x + y - 3} = 1, \\ \sqrt{3x - 2y + 1} = 2. \end{cases}$

5.51. $\begin{cases} \sqrt{2x - 3y + 2} = 3, \\ \sqrt{3x + 2y - 5} = 2. \end{cases}$

5.52. $\begin{cases} \sqrt{3y - 2x - 2} = 1, \\ \sqrt{4x - 2y + 3} = 2. \end{cases}$

Найдите координаты общих точек графиков функций (№ 5.53 — 5.56):

5.53. $y = \frac{1}{2}x + 5$ и $y = \sqrt{1 - 2x}.$

5.54. $y = 2x - 7$ и $y = \sqrt{2x - 1}.$

5.55. $y = 1 - 4x$ и $y = \sqrt{2x + 1}.$

5.56. $y = -1 - 2x$ и $y = \sqrt{2x + 3}.$

Степени и логарифмы

Решите уравнение (№ 5.57 — 5.64):

5.57. $3^x - 8 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 15 = 0.$

5.58. $3 \cdot 2^x - 2^{\frac{x}{2}+1} = 1.$

5.59. $3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0.$

5.60. $9^x + 4^x = 2{,}5 \cdot 6^x.$

5.61. $9^x + 4^{x+1,5} = 6^{x+1}.$

5.62. $4^{x+1} - 6^x - 2 \cdot 9^{x+1} = 0.$

5.63. $32^{3(x^2-8)} = 8^{19(2x-x^2)}.$

5.64. $8^{4(x^2+8)} = 16^{7(x^2+2x)}.$

Решите неравенство (№ 5.65 — 5.68):

5.65. $\log_2(x-1) + \log_2 x < 1.$

5.66. $\log_3(x+2) + \log_3 x > 1.$

5.67. $\log_2(x+1) + \log_2 x < 1.$

5.68. $\lg x + \lg(x-3) > 1.$

Решите неравенство (№ 5.69 — 5.76):

5.69. $\log_{0,5}(4-x) \geqslant \log_{0,5} 2 - \log_{0,5}(x-1).$

5.70. $\log_3(x^2 - 7x + 12) < \log_3 20.$

5.71. $\log_{0,3}(x^2 + x + 31) < \log_{0,3}(10x + 11).$

5.72. $-\log_2(x^2 + 3x) \geqslant 0.$

5.73. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{6-x}{x+1} \leqslant -2.$

5.74. $\log_3 \frac{8-x}{x+2} \geqslant 1.$

5.75. $\log_2 \frac{6+x}{x-3} < 2.$

5.76. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x+1}{x-2} > -1.$

Решите систему уравнений (№ 5.77 — 5.82):

5.77. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \frac{1}{9}, \\ y - x = 2. \end{cases}$

5.78. $\begin{cases} 2^y = 200 \cdot 5^x, \\ x + y = 1. \end{cases}$

5.79. $\begin{cases} 7^{x+1} \cdot 2^y = 4, \\ y - x = 3. \end{cases}$

5.80. $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot 5^y = 75, \\ x + y = 1. \end{cases}$

5.81. $\begin{cases} 5^{x-1} \cdot 7^y = \frac{1}{7}, \\ y - x = -2. \end{cases}$

5.82. $\begin{cases} \left(\frac{1}{7}\right)^x \cdot 3^y = 63, \\ y + x = 1. \end{cases}$

Производная и ее приложения

5.83. Найдите координаты точек, в которых касательные к графику функции $y = \frac{x+1}{x-3}$, имеющие угловой коэффициент -1, пересекают ось абсцисс.

5.84. Найдите координаты точек пересечения с осями координат касательных к графику функции $y = \frac{2x-3}{x+3}$, имеющих угловой коэффициент 9.

5.85. Найдите координаты точек пересечения с осью ординат касательных к графику функции $y = \frac{3x-1}{x+8}$, имеющих угловой коэффициент 1.

5.86. Найдите координаты точек пересечения с осями координат касательных к графику функции $y = \frac{2x-2}{x+1}$, имеющих угловой коэффициент 4.

5.87. Найдите координаты точек пересечения с осью ординат касательных к графику функции $y = \frac{x+4}{x-5}$, имеющих угловой коэффициент -1.

5.88. Найдите координаты точек пересечения с осями координат касательных к графику функции $y = \frac{3x-5}{x-3}$, имеющих угловой коэффициент 25.

5.89. Найдите точки экстремума функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ на промежутке $\left(-\frac{6}{5}; 2\right)$.

5.90. Найдите точки экстремума функции

$y = -x^3 - 3x^2 + 24x - 4$ на промежутке $\left(-5; \frac{1}{5}\right)$.

5.91. Найдите экстремумы функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$.

5.92. Найдите экстремумы функции $y = -x^3 + 6x^2 + 15x + 1$.

5.93. Найдите точки экстремума функции $y = \sin x - \cos x$ на промежутке $[0; \pi]$.

5.94. Найдите точки экстремума функции $y = \cos x - \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

5.95. Найдите экстремумы функции $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ на промежутке $[0; \pi]$.

5.96. Найдите экстремумы функции $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

5.97. Найдите точки экстремума функции $y = x + 2e^{-x}$.

5.98. Найдите точки экстремума функции $y = 2x + 3e^{-x}$.

5.99. Найдите экстремумы функции $y = -x + 2e^{x}$.

5.100. Найдите экстремумы функции $y = -3x - 2e^{-x}$.



Задания 9, 10 для экзамена «Алгебра и начала анализа»

Уравнения

Решите уравнение (№ 6.1 — 6.78):

6.1. $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2=4.$ **6.2.** $\log_5(x-8)^2=2+2\log_5(x-2).$

6.3. $\log_{9x^2}(6+2x-x^2)=\frac{1}{2}.$ **6.4.** $\log_{x-3}(x^2-4x)^2=4.$

6.5. $\log_3(3^x-8)=2-x.$ **6.6.** $\log_7(7^{-x}+6)=1+x.$

6.7. $\log_2(2^x-7)=3-x.$ **6.8.** $\log_4(4^{-x}+3)=x+1.$

6.9. $\log_6(6^{-x}+5)=1+x.$ **6.10.** $\log_5(5^x-4)=1-x.$

6.11. $2\log_7(x-2)=-2+\log_7(x-10)^2.$

6.12. $\log_{(x-6)^2}(x^2-5x+9)=\frac{1}{2}.$

6.13. $(2x^2-5x+2)(\log_{2x}18x+1)=0.$

6.14. $(x^2-7x+10)(\log_{\frac{x}{2}}8x+1)=0.$

6.15. $(2x-3)\sqrt{3x^2-5x-2}=0.$

6.16. $(2x^2-3x-2)\sqrt{3x+1}=0.$

6.17. $(6x-5)\sqrt{2x^2-5x+2}=0.$

6.18. $(3x^2-x-2)\sqrt{2x-1}=0.$

6.19. $(7x+2)\sqrt{4x-3x^2-1}=0.$

6.20. $(3x-x^2-2)\sqrt{7x+4}=0.$

6.21. $(3x+4)\sqrt{-3x-2x^2-1}=0.$

6.22. $(4x-x^2-3)\sqrt{5x-8}=0.$

6.23. $1 + \sin 3x = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2$.

6.24. $2\sin^2 2x = (\cos x + \sin x)^2$.

6.25. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$.

6.26. $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$.

6.27. $\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0$.

6.28. $\sin x + \sin 3x - \sin 5x - \sin 7x = 0$.

6.29. $\cos 2x + \cos 6x + 2\sin^2 x = 1$.

6.30. $4\cos x \sin x + \mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x = 0$.

6.31. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

6.32. $\sin x + \sin 3x = 4\cos^2 x$.

6.33. $\cos x = \cos 3x + 2\sin 2x$.

6.34. $8\sin^2 2x + 4\sin^2 4x = 5$.

6.35. $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$.

6.36. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$.

6.37. $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = 1{,}5$.

6.38. $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$.

6.39. $2\cos^2 4x - 6\cos^2 2x + 1 = 0$.

6.40. $\sin 2x + \sin 6x = 3\cos 2x$.

6.41. $144\cos^4 x - 4\sin^4 x = 9\sin^2 2x$.

6.42. $2(\cos 4x - \sin x \cos 3x) = \sin 4x + \sin 2x$.

6.43. $\cos 7x + \cos x = 2\cos 3x(\sin 2x - 1)$.

6.44. $\cos 5x - \cos x = \sin 3x\,(2\cos 4x + 1)$.

6.45. $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}\,(\cos x - \sin 3x)$.

6.46. $\cos 2x = \sqrt{2}\,(\cos x - \sin x)$.

6.47. $\sin x \cos 3x = \sin 2x$.

6.48. $5\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 2x$.

6.49. $\sin^2 6x + \sin^2 4x = 1$.

6.50. $2\sin 2x = \mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x$.

6.51. $\sin 5x = \sin x + \sin 2x$.

6.52. $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$.

6.53. $\cos^2 6x - \sin^2 3x - 1 = 0$.

6.54. $\cos x - \cos 3x = 3\sin^2 x$.

6.55. $\cos^4 2x + 6\cos^2 2x = \frac{25}{16}$.

6.56. $3\,\mathrm{tg}^2 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$.

6.57. $2\,\mathrm{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$.

6.58. $\mathrm{ctg}^2 x - 8\sin^2 x = 1$.

6.59. $9\,\mathrm{ctg}^2 x + 4\sin^2 x = 6$.

6.60. $1 - \cos 6x = \mathrm{tg}\, 3x$.

6.61. $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$.

6.62. $\cos 2x - \cos 4x = \sin 6x$.

6.63. $\sin 2x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$.

6.64. $\sin^2 x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$.

6.65. $\cos 2x = 2(\cos x - \sin x)$.

6.66. $(\cos 6x - 1)\operatorname{ctg} 3x = \sin 3x$.

6.67. $\sin x \sin 5x = \cos 4x$.

6.68. $\cos x \cos 3x = \cos 2x$.

6.69. $3\cos x + 2\operatorname{tg} x = 0$.

6.70. $5\sin x - 4\operatorname{ctg} x = 0$.

6.71. $8\sin^2 x + 4\sin^2 2x = 5 - 8\cos 2x$.

6.72. $2\sin^2 x = 4\sin^2 2x + 7\cos 2x - 6$.

6.73. $\operatorname{tg} x(1 - 2\sin x) - 2\cos x = \sqrt{3}$.

6.74. $\sqrt{3}\sin 2x + 2\sin^2 x - 1 = 2\cos x$.

6.75. $\sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x - 1 = 2\sin x$.

6.76. $-\operatorname{ctg} x(2\cos x + \sqrt{3}) = 2\sin x$.

6.77. $\sqrt{10}\cos x - \sqrt{4\cos x - \cos 2x} = 0$.

6.78. $\sqrt{5}\sin 2x - \sqrt{1 + 8\sin x\cos x} = 0$.

6.79. Найдите наименьший положительный корень уравнения $4\sin 3x \sin x + 2\cos 2x + 1 = 0$.

6.80. Найдите наименьший положительный корень уравнения $8\cos 6x\cos 2x + 2\sin^2 4x - 3 = 0$.

6.81. Найдите все решения уравнения $\sin 4x + 2\cos^2 x = 1$, удовлетворяющие условию $|x| < 1$.

6.82. Найдите все решения уравнения $2\sin^2 x + \cos 4x = 1$, удовлетворяющие условию $|x| < 1$.

Решите уравнение (№ 6.83 — 6.88):

6.83. $\sin x = x^2 + 2x + 2$.

6.84. $\cos x = x^2 - 2x + 2$.

6.85. $8\sin x = x^2 - 10x + 33$.

6.86. $2\cos x = -x^2 + 12x - 37$.

6.87. $\sin\frac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2$.

6.88. $\sin\frac{\pi x}{2} = 12x - 37 - x^2$.

Решите уравнение (№ 6.89 — 6.107):

6.89. $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7\cdot 2^{-x} = 4$.

6.90. $3^{6x-3} = 2\cdot 27^{x-\frac{2}{3}} + 1$.

6.91. $4^{3x^2+x} - 8 = 2\cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}$.

6.92. $2^{6x} + 8^{x+\frac{2}{3}} = 5$.

6.93. $64^x + 2^{2+3x} - 12 = 0$.

6.94. $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10\cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.

6.95. $4^{2|x|-3} - 3 \cdot 4^{|x|-2} - 1 = 0.$

6.96. $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x.$

6.97. $2x^3 = -18 - x.$

6.98. $x^3 + 33 = -2x.$

6.99. $x^5 + 2x^3 = 48.$

6.100. $x^5 + 4x = -40.$

6.101. $2^x + x = 3.$

6.102. $2^x = 6 - x.$

6.103. $2^{x+1} + x = -\frac{3}{2}.$

6.104. $2^x = -\frac{1}{2} - x.$

6.105. $\left(15^{x^2+x-2}\right)^{\sqrt{x-4}} = 1.$

6.106. $\left(0{,}7^{x-4}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}} = 1.$

6.107. $\left(17^{\sqrt{x^2+2x-8}}\right)^{x+3} = 1.$

Решите систему уравнений (№ 6.108 — 6.144):

6.108. $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-3y} + \dfrac{2}{3x-2y} = \dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{3}{2x-3y} + \dfrac{4}{3x-2y} = \dfrac{7}{4}. \end{cases}$

6.109. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{10}{x-y} = 1, \\ \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{2}{x-y} = -\dfrac{3}{5}. \end{cases}$

6.110. $\begin{cases} 2x - 2y = 3xy, \\ 4x^2 + 4y^2 = 5x^2y^2. \end{cases}$

6.111. $\begin{cases} 2 + xy = 3x, \\ 4x^2y^2 + 4 = 5x^2. \end{cases}$

6.112. $\begin{cases} 2xy + 1 = 3y, \\ 12x^2y^2 + 8 = 11y^2. \end{cases}$

6.113. $\begin{cases} 2xy + 2 + x = 0, \\ 4x^2y^2 + 4 = 5x^2. \end{cases}$

6.114. $\begin{cases} xy + x + y = 15, \\ x^2y + y^2x = 54. \end{cases}$

6.115. $\begin{cases} xy + x - y = 7, \\ x^2y - y^2x = 12. \end{cases}$

6.116. $\begin{cases} x^2y + x^2 - y = 7, \\ x^4y - y^2x^2 = 12. \end{cases}$

6.117. $\begin{cases} xy^2 + x - y^2 = 21, \\ x^2y^2 - y^4x = 20. \end{cases}$

6.118. $\begin{cases} x^2y + y = 9, \\ y + x^2 = 9. \end{cases}$

6.119. $\begin{cases} x^2 - xy = 3, \\ xy - y^2 = 2. \end{cases}$

6.120. $\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$

6.121. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$

6.122. $\begin{cases} x^2 - xy = 20y, \\ 5xy - 5y^2 = 4x. \end{cases}$

6.123. $\begin{cases} 4x^2 + xy = 20y, \\ 4xy + y^2 = 5x. \end{cases}$

6.124. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + y = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{x^2} + y^2 = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

6.125. $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2}, \\ x^2 + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5}{4}. \end{cases}$

6.126. $\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{y} = 2, \\ 3x^2 + \dfrac{2}{y^2} = 3. \end{cases}$

6.127. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + y = -\dfrac{1}{2}, \\ y^2 - \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

6.128. $\begin{cases} x + y = 8, \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{50}{7}. \end{cases}$

6.129. $\begin{cases} xy = 5, \\ \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{13}{6}. \end{cases}$

6.130. $\begin{cases} x - y = \log_2 y - \log_2 x, \\ x^2 + y = 12. \end{cases}$

6.131. $\begin{cases} y - x = \log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} y, \\ x = y^2 - 6. \end{cases}$

6.132. $\begin{cases} 2^x 3^y = 24, \\ 2^y 3^x = 54. \end{cases}$

6.133. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{3}{2}, \\ x + y + xy = 9. \end{cases}$

6.134. $\begin{cases} xy = 16, \\ x^{\log_2 y} = 8. \end{cases}$

6.135. $\begin{cases} \log_y x = 2, \\ x^{\lg y} = 100. \end{cases}$

6.136. $\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2\sqrt{y+1}}{2} = 2, \\ \log_2 x \cdot \log_2 (1+y)^2 = 4. \end{cases}$

6.137. $\begin{cases} x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}} = 6, \\ \log_4 x + \log_4 y = -3. \end{cases}$

6.138. $\begin{cases} (x+y) \cdot 3^{y-x} = \dfrac{5}{27}, \\ 3\log_5 (x+y) = x - y. \end{cases}$

6.139. $\begin{cases} 2x - \sin x = 2y - \sin y, \\ x + 2y = 9. \end{cases}$

6.140. $\begin{cases} 3x + \cos x = 3y + \cos y, \\ 3x - y = 6. \end{cases}$

6.141. $\begin{cases} \sqrt{x + y - 1} = 1, \\ \sqrt{x - y + 2} = 2y - 2. \end{cases}$

6.142. $\begin{cases} \sqrt{x - y + 5} = 3, \\ \sqrt{x + y - 5} = -2x + 11. \end{cases}$

6.143. $\begin{cases} \sqrt{x + 3y + 1} = 2, \\ \sqrt{2x - y + 2} = 7y - 6. \end{cases}$

6.144. $\begin{cases} \sqrt{y - x - 1} = 1, \\ \sqrt{x - 2y + 3} = 3y - 2x - 1. \end{cases}$

Модули

Решите уравнение (№ 6.145 — 6.192):

6.145. $|2x - 3| = 3 - 2x$.

6.146. $|4 - 5x| = 5x - 4$.

6.147. $|3x - 5| = 5 - 3x$.

6.148. $|7 - 4x| = 7 - 4x$.

6.149. $|5x - 13| - |6 - 5x| = 7$.

6.150. $|3x - 8| - |3x - 2| = 6$.

6.151. $|16 - 9x| - |9x - 5| = 11$.

6.152. $|7x - 12| - |7x - 1| = 1$.

6.153. $x^2 - 6|x| - 2 = 0$.

6.154. $x^2 - 4|x| - 1 = 0$.

6.155. $\frac{x}{|x|} + x = x^2 + 1$.

6.156. $-2 \cdot \frac{x}{|x|} - 2x = x^2 + 2$.

6.157. $5^{|4x - 6|} = 25^{3x - 4}$.

6.158. $3^{|3x - 4|} = 9^{2x - 2}$.

6.159. $9^{|3x - 1|} = 3^{8x - 2}$.

6.160. $25^{|1 - 2x|} = 5^{4 - 6x}$.

6.161. $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$.

6.162. $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}$.

6.163. $|\cos x| = \cos x - 2\sin x$.

6.164. $|\operatorname{ctg} x| = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}$.

6.165. $\cos x = |\cos x|\,(x + 1{,}5)^2$.

6.166. $|\cos x| = \cos x\,(x - 2)^2$.

6.167. $\cos x = |\sin x|$.

6.168. $\sqrt{3}\sin x = |\cos x|$.

6.169. $2\sin^2 x = |\sin x|$.

6.170. $2\cos^2 x = |\sin x|$.

6.171. $2\cos^2 x = |\cos x|$.

6.172. $3\operatorname{tg} x = \sqrt{3}\,|\sin x|$.

6.173. $\sqrt{3}\operatorname{ctg} x = 3\,|\cos x|$.

6.174. $2\sin^2 x = |\sqrt{3}\operatorname{tg} x|$.

6.175. $2\cos^2 x = |\operatorname{ctg} x|$.

6.176. $4^{|x - 2|\sin x} = 2^{x\,|\sin x|}$.

6.177. $\sin x = \operatorname{tg} x\,|\sin x|$.

6.178. $\cos x = \operatorname{tg} x\,|\cos x|$.

6.179. $|\cos x|\,(2x - 4) = |x - 2|$.

6.180. $|\sin x|\,(4x + 2) = |2x + 1|$.

6.181. $|\operatorname{tg} x|\,(x + 3) = |x + 3|$.

6.182. $|\operatorname{ctg} x|\,(2x - 3) = |2x - 3|$.

6.183. $8^x \geqslant 6 \cdot 9^{|x - 1|}$.

6.184. $25^{x + 1} \geqslant 10 \cdot 32^{|x - 1| + 1}$.

6.185. $|e^x - 1| = (2x + 3)(e^x - 1)$.

6.186. $\sin^2 x = \cos x\,|\sin x|$.

6.187. $\cos^2 x = \sin x\,|\cos x|$.

6.188. $|e^x - 1| = (3x + 2)(e^x - 1)$.

6.189. $|\sin x| + \sin x(x - 4)^2 = 0$.

6.190. $\sin x + |\sin x|\,(x + 1{,}5)^2 = 0$.

6.191. $|\log_2 x - 1| = (4 - 8x)(\log_2 x - 1)$.

6.192. $|\log_2 x - 1| = (2x + 5)(\log_2 x - 1)$.

Решите систему уравнений (№ 6.193 — 6.198):

6.193. $\begin{cases} 2|x-2| + 3|y+1| = 20, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$

6.194. $\begin{cases} 3|x+1| + 2|y-2| = 20, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$

6.195. $\begin{cases} 4|x-3| + |y+2| = 7, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$

6.196. $\begin{cases} 2|x-1| - 3|y+2| = 1, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$

6.197. $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x} = y - 1, \\ y + 2|x| = 1. \end{cases}$

6.198. $\begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 2y + 1} = 1, \\ x + |y| = 2. \end{cases}$

Решите неравенство (№ 6.199 — 6.206):

6.199. $2|x+1| > x + 4.$

6.200. $3|x-1| \leqslant x + 3.$

6.201. $4|x+2| < 2x + 10.$

6.202. $3|x+1| \geqslant x + 5.$

6.203. $3x^2 - |x-3| > 9x - 2.$

6.204. $x^2 + 4 \geqslant |3x+2| - 7x.$

6.205. $|x-2| - x < 2x^2 - 9x + 9.$

6.206. $x^2 - |5x-3| - x < 2.$

Параметры

Решите уравнение (№ 6.207 — 6.210):

6.207. $\dfrac{a}{2a-x} = 3.$

6.208. $\dfrac{a}{a-2x} = 3.$

6.209. $\dfrac{a}{2a-x} = 2.$

6.210. $\dfrac{a}{a-2x} = 2.$

6.211. Найдите все значения a, при которых число $x = 2$ является корнем уравнения $|x + 2a| \cdot x + 1 - a = 0.$

6.212. Найдите все значения a, при которых число $x = 3$ не является решением неравенства $2 \geqslant |x + 3a| + x^2.$

6.213. Найдите все значения a, при которых число $x = -3$ является решением неравенства $4 - |x - 2a| < x^2.$

6.214. Найдите все значения a, при которых число $x = -2$ является решением неравенства $3 - |x - 2a| > x^2.$

6.215. Найдите все значения a, при которых число $x = 2$ не является решением неравенства $-2 \leqslant |x + 3a| - x^2.$

6.216. Найдите все значения a, при которых число $x = -1$ не является корнем уравнения $x^2 + 4x - 2|x - a| + 2 - a = 0.$

6.217. Найдите все значения a, при которых число $x = -2$ является корнем уравнения $|x - a| \cdot x + 1 - 2a = 0.$

6.218. Найдите все значения a, при которых число $x = 1$ не является корнем уравнения $|2x + a| \cdot (x^2 + 1) + 3 - 2a = 0.$

10 – 5527

6.219. Найдите все значения a, при которых число $x = 2$ является корнем уравнения $\left(a - 3x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4}\right)\sqrt{8 - ax} = 0$.

6.220. Найдите все значения a, при которых число $x = 2$ является корнем уравнения $\left(a - 3x^2 - \sin\frac{11\pi x}{4}\right)\sqrt{11 - 3ax} = 0$.

6.221. Может ли при каком-нибудь значении a уравнение $2x^6 - x^4 - ax^2 = 1$ иметь три корня?

6.222. Может ли при каком-нибудь значении a уравнение $2x^8 - 3ax^6 + 4x^4 - ax^2 = 5$ иметь пять корней?

6.223. Докажите, что уравнение $3^x + 3^{-x} = ax^4 + 2x^2 + 2$ имеет нечетное число корней.

6.224. Докажите, что уравнение $4^x - 4^{-x} = x^3 + 2ax$ имеет нечетное число корней.

6.225. Найдите, при каких значениях a уравнение $\log_3(9^x + 9a^3) = x$ имеет ровно два корня.

6.226. Найдите, при каких значениях a уравнение $\log_2(4^x - a) = x$ имеет единственный корень.

6.227. Найдите, при каких значениях a уравнение $\log_2(4^x + a^3) + x = 0$ имеет ровно два корня.

6.228. Найдите, при каких значениях a уравнение $x - \log_3(2a - 9^x) = 0$ не имеет корней.

6.229. Для каждого значения a найдите число корней уравнения $|x - 1| = ax + 2$.

6.230. Для каждого значения a найдите число корней уравнения $|x + 1| = 3 - ax$.

6.231. Для каждого значения a найдите число корней уравнения $|x + 2| + 1 = a - 2x$.

6.232. Для каждого значения a найдите число корней уравнения $|x - 2| - 1 = a - 3x$.

Неравенства

Решите неравенство (№ 6.233 — 6.273):

6.233. $(2x - 3)\sqrt{3x^2 - 5x - 2} > 0$.

6.234. $(4x - x^2 - 3)\sqrt{5x - 8} \leqslant 0$.

6.235. $(6x - 5)\sqrt{2x^2 - 5x + 2} \geqslant 0$.

6.236. $(3x - x^2 - 2)\sqrt{7x + 4} < 0$.

6.237. $(3x + 4)\sqrt{-3x - 2x^2 - 1} < 0$.

6.238. $(3x^2 - x - 2)\sqrt{2x - 1} \geqslant 0$.

6.239. $(7x + 2)\sqrt{4x - 3x^2 - 1} \leqslant 0$.

6.240. $(2x^2 - 3x - 2)\sqrt{3x + 1} > 0$.

6.241. $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} > \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

6.242. $2^{\sqrt{x^2 - 3x + 3}} > 2^{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$.

6.243. $3^{-\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \leqslant 3^{-\sqrt{x^2 - x + 5}}$.

6.244. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x - 2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2 + 3x - 10}}$.

6.245. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{x + 4}} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{x^2 + 3x + 4}}$.

6.246. $2^{1 + 2x} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x + 3} + 2 \geqslant 0$.

6.247. $3^{4 - 3x} - 35 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2 - 3x} + 6 \geqslant 0$.

6.248. $4^{5 + 4x} - 15 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3 + 4x} + 8 \geqslant 0$.

6.249. $5^{5 - 4x} - 2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3 - 4x} - 5 \geqslant 0$.

6.250. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x + 1} - 36^x) \geqslant -2$.

6.251. $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}} (5^{x + 1} - 25^x) \leqslant -2$.

6.252. $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (3^{x + 2} - 9^x) \geqslant -6$.

6.253. $\log_2 (2 - 3x) > 4x + 1$.

6.254. $\log_2 (2 + x) > 1 - x$.

6.255. $9^x - 2 \cdot 3^x < 3$.

6.256. $4^x - 3 \cdot 2^x < 4$.

6.257. $\log_x \dfrac{2x + \frac{2}{5}}{5(1 - x)} > 0$.

6.258. $\log_x \dfrac{4x + 1}{6(x - 1)} < 0$.

6.259. $\log_x \dfrac{3x+2}{4(1-x)} \geqslant 0.$

6.260. $\log_x \dfrac{2x+5}{4(x-1)} \leqslant 0.$

6.261. $\log_{5x-4x^2} 4^{-x} > 0.$

6.262. $\log_{-6x-5x^2} 6^x > 0.$

6.263. $\log_{x^2+4} 8 < 1.$

6.264. $\log_{x^2+2} 3 \geqslant 1.$

6.265. $\log_7 x - \log_x \dfrac{1}{7} \geqslant 2.$

6.266. $2\log_2 \sqrt{x} - 2 \geqslant \log_x \dfrac{1}{2}.$

6.267. $\log_x \dfrac{1}{4} + \log_4 x^{-1} \leqslant -2.$

6.268. $\log_x 3 - 4 \geqslant -4\log_3 x.$

6.269. $\log_{\frac{8}{3}} \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - x - 6) \geqslant 0.$

6.270. $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} (2^{x+2} - 4^x) \leqslant -2.$

6.271. $\log_{\frac{27}{41}} \log_5 (x^2 - 2x - 3) \leqslant 0.$

6.272. $\log_{\frac{12}{11}} \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 3x - 4) \leqslant 0.$

6.273. $\log_2 \log_{\frac{9}{16}} (x^2 - 4x + 3) \leqslant 0.$

6.274. Найдите все значения x, при которых меньшее из чисел $1 + 2x$ и $2 + x$ больше -1.

6.275. Найдите все значения x, при которых меньшее из чисел $3 - 2x$ и $1 - x$ меньше 1.

6.276. Найдите все значения x, при которых большее из чисел $3 - 2x$ и $1 - x$ меньше 1.

6.277. Найдите все значения x, при которых большее из чисел $3 - 2x$ и $1 - x$ больше 1.

Возрастание, убывание, экстремумы, наибольшие и наименьшие значения

6.278. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt{2x^2 + 5x - 7}$ на отрезке [3; 4].

6.279. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt{\dfrac{1}{2}x^2 + 3x + 5}$ на отрезке [2; 5].

6.280. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{3}{\sqrt{3 + x - \frac{1}{4}x^2}}$ на отрезке [−1; 3].

6.281. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -\frac{3}{\sqrt{2x^2 - x - 1}}$ на отрезке [2; 3].

6.282. Определите промежутки возрастания и убывания функции $y = \sqrt{4x^2 - x - 3}$.

6.283. Определите промежутки возрастания и убывания функции $y = \log_2 (2x^2 - 3x - 2)$.

6.284. Определите промежутки возрастания и убывания функции $y = -\frac{3}{\sqrt{2x^2 - x - 1}}$.

6.285. Определите промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{5}{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}$.

6.286. Определите промежутки возрастания и убывания функции $y = \log_{0,5} (2x^2 - 3x - 2)$.

6.287. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, основания которых являются квадратами, а каждая из боковых граней имеет периметр 6 см. Найдите среди них параллелепипед с наибольшим объемом и вычислите этот объем.

6.288. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен 4 $см^3$, а основания являются квадратами. Найдите среди них параллелепипед с наименьшим периметром боковой грани и вычислите этот периметр.

6.289. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, у которых одна из боковых граней является квадратом, а периметр нижнего основания равен 12 см. Найдите среди них параллелепипед с наибольшим объемом и вычислите этот объем.

6.290. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен 0,5 см^3, а одна из боковых граней является квадратом. Найдите среди них параллелепипед с наименьшим периметром основания и вычислите этот периметр.

6.291. Найдите наименьшее значение функции $y = x \ln x - x \ln 5$ на отрезке [1; 5].

6.292. Найдите наименьшее значение функции

$y = \frac{1}{2}x \ln x - x \ln 2$ на отрезке [1; 4].

6.293. Найдите наименьшее значение функции

$y = \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{6}x \ln 9$ на отрезке [1; 3].

6.294. Найдите наименьшее значение функции

$y = 2x \ln x - x \ln 49$ на отрезке [1; 7].

6.295. Найдите точки минимума функции

$$y = 2\sqrt{3}\cos x + 2\sin x - 2x + 1.$$

6.296. Найдите точки максимума функции

$$y = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 10 - 2x.$$

6.297. Найдите точки максимума функции

$$y = 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x - 2\sqrt{3}x + 11.$$

6.298. Найдите точки минимума функции

$$y = \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x + 2\sqrt{3}x - 3.$$

6.299. Найдите наименьшее значение функции

$y = 1 + 4\sin x - 2x$ на отрезке $[0; \pi]$.

6.300. Найдите наибольшее значение функции

$y = -3 + 4\sin x + 2x$ на отрезке $[\pi; 2\pi]$.

Вариант экзаменационного задания по курсу «Математика»

1. Решите неравенство $\frac{(x + 11)(2x - 5)}{3x} \leqslant 0$.

2. Решите уравнение $10 \cdot 5^{x-1} + 5^{x+1} = 7$.

3. Решите уравнение $2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком.

Укажите:

а) область определения функции;

б) при каких значениях x

$$f(x) \leqslant 0;$$

в) точки экстремума функции;

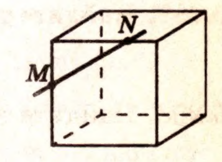
г) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

д) наибольшее и наименьшее значения функции.

5. Найдите при $x = -\frac{\pi}{4}$ значение производной функции

$$f(x) = \operatorname{tg} x - 2 \sin x.$$

6. Точки M и N расположены на ребрах куба. Скопируйте рисунок, отметьте и обозначьте точки, в которых прямая MN пересекает прямые, содержащие другие ребра куба.



7. Найдите площадь полной поверхности тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетами 3 см и 4 см вокруг большего катета.

8. Высота правильной шестиугольной пирамиды равна 12 см, а боковое ребро — 13 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

9. Найдите абсциссы общих точек графиков функции $y = \sin x$ и $y = \sin 2x$.

10. Выясните, является ли прямая $y = x + 1$ касательной к графику функции $y = e^x$.

Вариант экзаменационного задания по курсу «Алгебра и начала анализа»

1. Решите неравенство

$$\frac{8x^2 - 2x - 1}{x} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2 3 - \log_2 (2 - 3x) = 2 - \log_2 (4 - 3x).$$

3. Решите уравнение

$$3 \operatorname{tg} 2x - \sqrt{3} = 0.$$

4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:
а) область определения функции есть промежуток $[-4; 3]$;
б) все значения функции составляют промежуток $[-3; 4]$;
в) $f'(x) < 0$ для любого x из промежутка $(-4; 0)$, $f'(x) > 0$ для любого x из промежутков $(0; 2)$ и $(2; 3)$, $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и при $x = 2$;
г) нули функции: $x = -1$ и $x = 2$.

5. Найдите все первообразные функции $f(x) = 3x^4 - 1$.

6. Найдите абсциссы общих точек графиков функций $y = \sin x$ и $y = \sin 2x$.

7. Выясните, является ли прямая $y = x + 1$ касательной к графику функции $y = e^x$.

8. Решите неравенство

$$\cos x \geqslant 1 + 2^x.$$

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + y = -\frac{1}{2}, \\ y^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

10. Определите промежутки возрастания и убывания функции

$$y = \log_{0,5} (2x^2 - 3x - 2).$$



сборник заданий


ISBN 5-7107-5312-2